Thèse

Présentée à

l'Université Paul Verlaine-Metz

Pour obtenir le grade de Docteur de l'Université Paul Verlaine-Metz
Spécialité: Mathématiques pures

par

Laurent Scuto

Quelques problèmes d'Analyse Harmonique sur certains groupes de Lie exponentiels

Soutenue le 26 octobre 2005 devant le Jury composé de :

Monsieur Sami Mustapha,	Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie, Paris 6 Rapporteur
Monsieur Takaaki Nomura,	Professeur à l'Université de Kyushu Rapporteur

Monsieur Jean Ludwig,	Professeur à l'Université Paul Verlaine-Metz, Directeur de thèse
Madame Carine Molitor-Braun,	Professeur à l'Université du Luxembourg
Madame Angela Pasquale,	Professeur à l'Université Paul Verlaine-Metz
Monsieur Tilmann Würzbacher,	Professeur à l'Université Paul Verlaine-Metz

Laboratoire de Mathématiques et Applications de Metz
UFR MIM - CNRS UMR 7122, Ile du Saulcy, 57045 METZ Cedex 1

A ma femme Marjorie

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tout particulièrement Monsieur Jean Ludwig, mon Directeur de thèse, pour m'avoir encadré durant ces années et ainsi fait partager ses nombreuses connaissances pour mener à bien cette étude.

Un grand merci également à Monsieur Nomura et Monsieur Mustapha, rapporteurs, pour les différentes remarques et commentaires apportés au sujet de ces travaux.

Il me tient aussi à coeur de remercier Madame Molitor-Braun, Madame Pasquale et Monsieur Würzbacher pour avoir accepter de faire partie du jury ainsi que pour m'avoir aidé et soutenu tout au long de l'élaboration de cette thèse.

Enfin, ma reconnaissance va à tous les membres du laboratoire L.M.A.M. pour m'avoir accueilli et encouragé durant cette période.

Je remercie tous ceux, qui de près ou de loin, auront su contribuer à l'aboutissement de ce projet.

Sincèrement...

Table des matières

Introduction générale

Comme le titre de cette thèse l'indique, nous allons étudier plusieurs problèmes, plus ou moins indépendants, liés à certains groupes de Lie exponentiels résolubles.

S'étant donné un tel groupe de Lie, il est très intéressant de savoir si les propriétés connues dans le monde mathématique abélien restent vraies dans ces situations ou, si au contraire, elles sont contredites. Ceci nous permet, entre autre, de mieux connaître, notre espace le plus familier : $\mathbb{R}^n$ et d'élargir nos perspectives scientifiques.

Pour mieux comprendre la structure des fonctions d'une variable réelle, on a introduit la notion d'analyse harmonique, i.e., la décomposition de fonctions en fonctions d'un type plus simple. Dans $\mathbb{R}^n$, celle-ci se traduit par l'introduction de la transformée de Fourier. Mais que se passe-t-il lorsque l'on passe à des structures plus complexes, en l'occurence à des groupes et algèbres de Lie non commutatifs ?

Soit G un groupe de Lie exponentiel résoluble ou plus simplement exponentiel, i.e., dont l'application exponentielle est un difféomorphisme. Cette classe de groupes est composée d'une grande étendue de groupes bien connus : les groupes de Lie nilpotents, les groupes "$ax + b$" et encore bien d'autres.

Pour pouvoir généraliser la notion de transformée de Fourier, une notion naturelle est apparue : le dual unitaire $\widehat{G}$ du groupe G, i.e., l'ensemble des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles de G.

Ceci étant introduit, on veut voir si les grands théorèmes de l'analyse réelle ont encore un sens.

C'est ce que l'on va faire pour certains d'entre eux dans cette thèse et voici son plan :

Chapitre 1 : Généralités

Nous donnons ici le matériel nécessaire pour la compréhension de cette thèse. Nous revenons sur la structure des groupes de Lie exponentiels résolubles ainsi que sur celle de leur dual unitaire, via la méthode des orbites. Nous rappelons plus précisément le cas particulier des groupes de Lie nilpotents.

Chapitre 2 : Transformation de Fourier L^p dans les groupes de Lie fortement $*$-réguliers

S'étant donnée une fonction f dans $L^1(\mathbb{R})$, on lui associe sa transformée de Fourier $\mathcal{F}f = \widehat{f}$ par l'application

$$\widehat{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

définie par

$$\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x.\xi} dx$$

Alors il est facile de voir que $\|\mathcal{F}f\|_\infty \leq \|f\|_1$ et d'après le théorème classique de Plancherel, $\|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2$.

Le théorème de Riesz-Thorin nous permet de déduire le théorème de Hausdorff-Young

$$\forall\ 1 \leq p \leq 2, \text{ et } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \|\mathcal{F}f\|_q \leq \|f\|_p.$$

Ainsi la transformation de Fourier est un opérateur borné de $L^p(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ sur $L^q(\mathbb{R})$, on peut donc l'étendre en l'opérateur :

$$\mathcal{F}^p : L^p(\mathbb{R}) \to L^q(\mathbb{R}).$$

Une question naturelle se pose : peut-on calculer sa norme ?

En fait,

$$\|\mathcal{F}^p(\mathbb{R})\| = \sup_{\|\varphi\|_p \leq 1} \|\mathcal{F}(\varphi)\|_q \leq 1.$$

Babenko, en 1961, a démontré dans [Ba], que si q est pair, on a

$$\|\mathcal{F}^p(\mathbb{R})\| = A_p, \text{ où } A_p = \Big(\frac{p^{\frac{1}{p}}}{q^{\frac{1}{q}}}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Beckner, en 1975, a généralisé, dans [Be], cette égalité pour $1 < p \leq 2$.

Une autre question naturelle se pose : peut-on calculer cette norme dans le cas des groupes non-abéliens ? Si oui, peut-on espérer que ces normes permettent une classification des groupes non-abéliens ?

Malheureusement, le calcul de ces normes est très difficile, car il demande une connaissance approfondie des groupes étudiés.

Dans ce chapitre, on étudiera la transformée de Fourier L^p pour une classe spéciale de groupes de Lie exponentiels, les groupes de Lie exponentiels fortement $*$-réguliers, et on donnera une estimation de sa norme en utilisant la méthode des orbites.

Ce qui nous conduira au résultat suivant :

Théorème. *Soit G un groupe de Lie exponentiel résoluble vérifiant la condition de $*$-régularité forte. Soit m la dimension maximale des orbites coadjointes.*
Soient $1 < p \leq 2$ et $q = \dfrac{p}{p-1}$. Alors, pour tout $\varphi \in L^1(G) \cap L^p(G)$ et pour μ-presque tout $\pi \in \widehat{G}$, l'opérateur $\pi^p(\varphi) := \pi(\varphi) K_\pi^{\frac{-1}{q}}$ est borné, son extension est de classe C_q et satisfait l'inégalité suivante :

$$\Big(\int_{\widehat{G}} \|\pi^p(\varphi)\|_{C_q}^q d\mu(\pi)\Big)^{\frac{1}{q}} \leq A_p^{\frac{2dimG-m}{2}} \|\varphi\|_p.$$

Ces travaux font l'objet d'un article, cosigné par A. Baklouti, J. Ludwig, K. Smaoui et moi-même, à paraître bientôt au journal *Acta Mathematica Sinica* sous le titre *Estimate of the L^p-Fourier Transform Norm on Strong $*$-Regular Exponential Solvable Lie Groups.*

Chapitre 3 : Théorème d'inversion de Fourier pour les groupes de Lie nilpotents

L'un des plus fameux et utiles résultats de l'analyse harmonique sur $\mathbb{R}^n$ est le théorème d'inversion de Fourier. Mais peut-on le généraliser aux groupes de Lie nilpotents ?

Si ceux-ci ressemblent “presque” à $\mathbb{R}^n$ par de nombreux aspects et que leur théorie des représentations est bien établie, leurs comportements révèlent cependant d'importantes différences.

Au cours de ce chapitre, nous aborderons la généralisation de ce théorème, ce qui mènera au résultat suivant :

Théorème. *Soit $G = \exp \mathfrak{g}$ un groupe de Lie nilpotent connexe, simplement connexe, muni d'une base de Jordan-Hölder fixe.*

Pour chaque $l \in \mathfrak{g}^*$, posons $\mathfrak{b}_l$ la polarisation de Vergne correspondante et $B_l = \exp \mathfrak{b}_l$. Alors il existe un ouvert de Zariski $\mathfrak{g}^*_{gen}$ de $\mathfrak{g}^*$, tel que pour toute fonction $\mathcal{C}^\infty$

$F : \mathfrak{g}^*_{gen} \times G \times G \to \mathbb{C}$ qui, pour $l \in \mathfrak{g}^*_{gen}$ fixée, est Schwartz sur $G/B_l \times G/B_l$, qui est à support compact en l (si on se restreint à une section d' et qui vérifient la relation de covariance

$$F(l, xh, yh') = \overline{\chi_l(h)}\chi_l(h')F(l, x, y),$$

il existe une unique fonction $f \in \mathcal{S}(G)$ telle que $\pi_l(f)$ admette $F(l, \cdot, \cdot)$ comme noyau, pour chaque $l \in \mathfrak{g}^*_{gen}$.

L'application $F \mapsto f$ est continue par rapport aux topologies des espaces de fonctions considérés.

Afin de prouver ce théorème, on aura besoin d'introduire de nouvelles structures : les groupes et algèbres de Lie variables nilpotents.

Chapitre 4 : Application : décomposition de l'espace L^2 des groupes de Lie nilpotents

Le théorème d'inversion de Fourier permet de nombreuses applications. Il est très utile pour construire des fonctions $f \in \mathcal{S}(G)$ dont la transformée de Fourier généralisée $\Big(\pi_l(f)\Big)_{l \in \mathfrak{g}^*/Ad^*G}$ vérifie certaines conditions. Dans ce chapitre, nous allons exploiter cette propriété pour obtenir une nouvelle décomposition de l'espace L^2 des groupes de Lie nilpotents.

S'étant donné encore un groupe de Lie $G = \exp(\mathfrak{g})$ nilpotent connexe, simplement connexe, nous décrirons $L^2(G)$ comme fermeture d'une somme de sous-espaces invariants à gauche qui coïncident avec l'ensemble des solutions faibles, dans $L^2(G)$, d'un certain système d'équations différentielles. La restriction de la représentation régulière gauche à chacun de ces sous-espaces se désintègre en une intégrale directe de représentations irréductibles unitaires de multiplicités 0 et 1.

Nous obtiendrons le théorème suivant :

Théorème. *Soit G un groupe de Lie nilpotent connexe, simplement connexe non-abélien. Alors,*

$$\overline{\bigoplus_{\varepsilon\in\{-1,1\}^d}^{\perp}\left(\sum_{u\in G} L^2_{u,\varepsilon}(G)\right)}^{L^2(G)} = L^2(G).$$

Ces deux derniers chapitres ont été obtenus en collaboration avec Carine Molitor-Braun.

Chapitre 1

Généralités

1.1 Définitions et outils de base

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle de dimension finie.

Définitions 1.1. 1. Posons $\mathcal{D}^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g},\ \mathcal{D}^1(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et par récurrence

$$\mathcal{D}^k(\mathfrak{g}) = [\mathcal{D}^{k-1}(\mathfrak{g}), \mathcal{D}^{k-1}(\mathfrak{g})],\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

L'algèbre $\mathfrak{g}$ est dite **résoluble** si $\mathcal{D}^j(\mathfrak{g}) = \{0\}$ pour un certain $j \in \mathbb{N}$.

2. Posons $\mathcal{C}^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g},\ \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et par récurrence

$$\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}) = [\mathcal{C}^{k-1}(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}],\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

L'algèbre $\mathfrak{g}$ est dite **nilpotente** si $\mathcal{C}^j(\mathfrak{g}) = \{0\}$ pour un certain $j \in \mathbb{N}$.

Un groupe de Lie G est dit résoluble (respectivement nilpotent) si son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est résoluble (respectivement nilpotente).

3. Un groupe de Lie G connexe, simplement connexe et son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sont dits **résolubles exponentiels** ou plus simplement **exponentiels**, si l'application exponentielle :

$$\exp\ :\ \mathfrak{g} \longrightarrow G$$

est un difféomorphisme de $\mathfrak{g}$ dans G. Désignons par log son application réciproque.

Dans la suite G désignera un groupe de Lie exponentiel, dont l'algèbre de Lie sera notée $\mathfrak{g}$.

Soit $\mathfrak{g}^*$ l'espace vectoriel dual de $\mathfrak{g}$.

Définitions 1.2. 1. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ agit sur $\mathfrak{g}$ par **représentation adjointe** $\mathbf{ad}_{\mathfrak{g}}$:

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X)Y := \mathrm{ad}(X)Y = [X,Y],\ \forall\ X,\ Y \in \mathfrak{g}.$$

2. Le groupe G agit sur $\mathfrak{g}$ par **représentation adjointe** $\mathbf{Ad}_G$:

$$\mathrm{Ad}_G(g)Y := \mathrm{Ad}(g)Y := e^{\mathrm{ad}X}Y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\mathrm{ad}X)^n(Y),\ g = \exp X \in G,\ Y \in \mathfrak{g},$$

et sur $\mathfrak{g}^*$ par **représentation coadjointe** $\mathbf{Ad}_G^*$:

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Ad}_G^* : & G & \longrightarrow & Aut(\mathfrak{g}^*) \\ & x & \longmapsto & \mathrm{Ad}_G^*\ x \end{array}$$

$$< \mathrm{Ad}_G^*(g)l, X > = < g \cdot l, X > = < l, \mathrm{Ad}_G(g^{-1})X >,\ g \in G,\quad l \in \mathfrak{g}^*,\ X \in \mathfrak{g}.$$

3. L'ensemble $G \cdot l = \{g \cdot l,\ g \in G\} =: \Omega_l$ est appelé la **G-orbite coadjointe en** l et $\mathfrak{g}^*/G$ l'espace des orbites coadjointes. Ces orbites sont toujours de dimension paire.

Introduisons quelques algèbres d'une grande utilité.

Définitions 1.3. 1. Soit $\mathfrak{g}(l) = \{X \in \mathfrak{g},\ < l, [X, \mathfrak{g}] > = \{0\}\ \}$ le **stabilisateur de la forme linéaire** $l \in \mathfrak{g}^*$ **dans** $\mathfrak{g}$, c'est l'algèbre de Lie de $G_l = \{g \in G,\ g \cdot l = l\ \}$.

2. Si $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{p}^\perp = \{f \in \mathfrak{g}^*,\ f_{|\mathfrak{p}} = 0\}$ représente l'**annihilateur de** $\mathfrak{p}$ **dans** $\mathfrak{g}^*$.

3. Un sous-espace $\mathfrak{b}(l) \subset \mathfrak{g}$ est appelé **polarisation** en $l \in \mathfrak{g}^*$, si $\mathfrak{b}(l)$ est une sous-algèbre totalement isotrope maximale relativement à la forme bilinéaire antisymétrique B_l définie par

$$B_l(X,Y) = < l, [X,Y] >,\ X,\ Y \in \mathfrak{g}.$$

Une polarisation $\mathfrak{b}(l)$ en l satisfait la **condition de Pukanszky** ou est une **polarisation de Pukanszky**, si

$$l + \mathfrak{b}(l)^\perp = \mathrm{Ad}^*(B(l))l = B(l) \cdot l,\ \text{où}\ B(l) = \exp \mathfrak{b}(l).$$

4. Le **caractère unitaire** $\chi_l = \chi$ **de** $B(l)$ **associé à** l est défini par

$$\chi(\exp \text{X}) = e^{-2\pi i<l,X>}, \ \forall \ X \in \mathfrak{b}(l).$$

Remarques. 1. Rappelons une méthode pratique pour obtenir une polarisation de Pukanzsky en l.

Comme $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie exponentielle, on sait qu'il existe une **bonne suite de sous-algèbres** $\mathcal{S} = (\mathfrak{a}_k)_{k=0}^n$ **de** $\mathfrak{g}$, c'est une suite croissante de sous-algèbres

$$\{0\} = \mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{a}_n = \mathfrak{g}.$$

telle que pour tout $j = 1, \ldots, n$,

a. $\dim \mathfrak{a}_j/\mathfrak{a}_{j-1} = 1$,

b. Si $\mathfrak{a}_j$ n'est pas un idéal de $\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{a}_{j-1}$ et $\mathfrak{a}_{j+1}$ sont des idéaux de $\mathfrak{g}$ et la représentation déduite de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{a}_{j+1}/\mathfrak{a}_{j-1}$ est irréductible, i.e., $\mathfrak{a}_{j-1}$ est un idéal de $\mathfrak{a}_{j+1}$.

Soient $l \in \mathfrak{g}^*$, posons $l_k = l_{|\mathfrak{a}_k}$ la restriction de l à $\mathfrak{a}_k$ et $\mathfrak{a}_k(l_k)$ le noyau de la forme B_{l_k} sur $\mathfrak{a}_k \times \mathfrak{a}_k$.

Définissons

$$\mathfrak{h}(l, \mathcal{S}) = \sum_{k=0}^{n} \mathfrak{a}_k(l_k).$$

Alors $\mathfrak{h}(l, \mathcal{S})$ est une polarisation de Pukanszky en l, appelée la **polarisation de Vergne en** l.

2. Si G est un groupe de Lie nilpotent, toute polarisation vérifie la condition de Pukanszky.

Définition 1.1. On dit que l'**orbite coadjointe** Ω_l **de** $l \in \mathfrak{g}^*$ **est saturée** par rapport à un idéal de codimension un $\mathfrak{g}_0 = \text{Lie } G_0$ dans $\mathfrak{g}$, si $\mathfrak{g}(l) \subset \mathfrak{g}_0$.

En particulier, d'après [C-G], on a que $G \cdot l = G \cdot l + \mathfrak{g}_0^{\perp}$ et

$$\dim(G_0 \cdot l_0) = \dim(G \cdot l) - 2, \text{où } l_0 = l_{|\mathfrak{g}_0}. \tag{1.1}$$

1.2 Un peu d'intégration

L'espace $C_c(G)$ désignera l'ensemble des fonctions continues à support compact sur G.

Soient dg une mesure de Haar invariante à gauche sur G et Δ_G la fonction module G, qui est définie par la relation :

$$\forall x \in G, \quad \int_G f(gx^{-1})\ dg = \Delta_G(x) \int_G f(g)\ dg. \tag{2.2}$$

Il est bien connu que pour $x \in G$:

$$\Delta_G(x) = |\det \mathrm{Ad} x|^{-1} = e^{-\mathrm{tr}\ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\log x)}.$$

Pour pouvoir faire des calculs explicites, on doit se ramener au calcul dans un espace bien connu : $\mathbb{R}^n$. Ceci est possible, car on connaît l'existence de certaines bases particulières de $\mathfrak{g}$ dont on rappelle les définitions :

Définitions 1.4. Soit $\mathcal{Z} = (Z_1, \ldots, Z_n)$ une base de $\mathfrak{g}$. Soit $(\mathfrak{g}_k)_{k=1}^n$ la suite de sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{g}$ définie par

$$\mathfrak{g}_k = \sum_{i=1}^k \mathbb{R} Z_i.$$

1. $\mathcal{Z}$ est une **base de Malcev** de $\mathfrak{g}$ si pour tout $k,\ 1 \leq k \leq n$, le sous-espace vectoriel $\mathfrak{g}_k$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_k$ est un idéal de $\mathfrak{g}_{k+1}$.

2. $\mathcal{Z}$ est une **base de Jordan-Hölder** de $\mathfrak{g}$ si pour tout $k,\ 1 \leq k \leq n$, le sous-espace vectoriel $\mathfrak{g}_k$ est un idéal de $\mathfrak{g}$.

Proposition 1.1. *Soit G un groupe de Lie exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{g}$ admet une base de Malcev $\mathcal{Z}$.*

De plus, l'application suivante

$$\begin{array}{rcl} E_{\mathcal{Z}} : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & G \\ w = (w_1, ..., w_n) & \longmapsto & \exp(w_1 Z_1) \cdot \ \ldots \ \cdot \exp(w_n Z_n) \end{array} \tag{2.3}$$

est un difféomorphisme.

Si de plus $\mathfrak{g}$ est complètement résoluble, alors elle possède une base de Jordan-Hölder. En particulier, toute algèbre de Lie nilpotente admet une base de Jordan-Hölder.

Démonstration. Voir [B-A] .

□

Dans la suite, on choisit notre mesure de Haar dg sur G de telle manière que l'on ait

$$\nu_G(f) = \int_G f(g)\ d_{\nu_G}(g) := \int_{\mathbb{R}^n} f\big(z_1Z_1...z_nZ_n\big)\ dZ, \forall f \in \mathcal{C}_c(G), \tag{2.4}$$

où l'on a noté

$$z_1Z_1...z_nZ_n = \exp(z_1Z_1)\cdot\ \ldots\ \cdot\exp(z_nZ_n)$$

et dZ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Soit maintenant H un sous-groupe fermé de G d'algèbre de Lie correspondante $\mathfrak{h}$. Désignons par $\Delta_{H,G}$ le caractère positif de H défini par :

$$\Delta_{H,G}(h) = \frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)}.$$

Donc on a :

$$\Delta_{H,G}(\mathrm{X}) = \exp(\mathrm{tr}\ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}X),\ \ X \in \mathfrak{h}.$$

Il est clair que, si H est un sous-groupe normal de G, alors $\Delta_{H,G}(h) = 1,\ \forall h \in \mathfrak{h}$.

On sait qu'il existe une base de Malcev de $\mathfrak{g}$ relative à $\mathfrak{h}$ ou encore appelée base co-exponentielle de $\mathfrak{g}$ relative à $\mathfrak{h}$, notée $\mathcal{Z}(\mathfrak{h}) := (Z_{k_1}, ..., Z_{k_p})$ où $p = n - d$ est la codimension de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$.

Elle est aussi construite de façon canonique à partir de $\mathcal{Z}$.

Pour cela, posons $\{k_1 < ... < k_p\} = \big\{i \in \{1, ..., n\},\ Z_i \notin \mathfrak{h} + \mathfrak{g}_{i+1}\big\}$.

On obtient le difféomorphisme $E_{G/H}$ suivant :

$$\begin{array}{rccc} E_{G/H}: & \mathbb{R}^p & \longrightarrow & G/H \\ & w = (w_1, ..., w_p) & \longmapsto & w_1Z_{k_1}...w_pZ_{k_p}\cdot H \end{array} \tag{2.5}$$

On en déduit que $C_c(G/H)$ des fonctions numériques $\varphi : G/H \longrightarrow \mathbb{C}$, qui sont continues à support compact, s'identifie à $C_c(\mathbb{R}^p)$ muni de la mesure image de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^p$. Ainsi on a pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c(G/H)$

$$\int_{G/H} \varphi(\dot{g})\ d\dot{g} = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi\big(w_1Z_{k_1}...w_pZ_{k_p}\cdot H\big)\ dw\ , \tag{2.6}$$

où dw est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^p$.

1.3 Représentations induites

Considérons l'espace suivant :

$$K(G,H) = \Big\{ F:\ G \longrightarrow \mathbb{C},\ \text{continue et à support compact modulo } H \\ \text{telle que : } F(gh) = \Delta_{G,H}(h)^{-1}F(g),\ \forall (g,h) \in G\times H \Big\}.$$

Le groupe G agit sur cet espace par translation à gauche. Il est démontré dans [B-A] qu'à un scalaire multiplicatif près, il existe une unique forme linéaire positive G-invariante sur $K(G,H)$. On la note généralement $\nu_{G,H}$ ou plus simplement ν et on a ainsi :

$$\nu_{G,H}(F) = \oint_{G/H} F(g)\ d\nu_{G,H}(\dot{g}),\ \forall F \in K(G,H).$$

On remarque que si $\Delta_G = \Delta_H$ sur H, alors $\nu_{G,H}$ est une mesure G-invariante sur l'espace homogène G/H et $K(G,H) = C_c(G/H)$.

Soit π_0 une représentation unitaire de H dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_{\pi_0}$. On peut lui associer un nouvel espace :

$$K_{\pi_0}(G,H) = \Big\{ F: G \longrightarrow \mathcal{H}_{\pi_0},\ \text{continue et à support compact modulo } H \\ \text{telle que : } F(gh) = \Delta_{G,H}(h)^{-\frac{1}{2}}\ \pi_0(h^{-1})\big(F(g)\big), \forall (g,h) \in G\times H \Big\}.$$

Si F est un élément de $K_{\pi_0}(G,H)$, l'application $g \longmapsto \|F(g)\|^2_{\mathcal{H}_{\pi_0}}$ appartient à $K(G,H)$. Cette relation nous permet de définir une norme L^2 sur $K_{\pi_0}(G,H)$ de la manière suivante :

$$\|F\|_2 = \Big(\oint_{G/H} \|F(g)\|^2_{\mathcal{H}_{\pi_0}} d\nu(\dot{g}) \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

On définit la représentation induite $\mathrm{ind}_H^G\ \pi_0$ de G comme la représentation régulière gauche de G sur le complété $L^2(G/H,\pi_0)$ de $K_{\pi_0}(G,H)$ par rapport à la norme $\|\cdot\|_2$ définie précédemment, i.e.,

$$(\mathrm{ind}_H^G\ \pi_0)(x)(\xi)(y) = \xi(x^{-1}y),\ \forall x,y \in G,\ \xi \in L^2(G/H,\pi_0).$$

1.4 La méthode des orbites

Nous allons décrire le **dual unitaire** $\widehat{G}$ de G, c'est-à-dire, l'ensemble des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles de G.

Celui-ci peut être paramétrisé via la méthode des orbites de Kirillov-Bernat-Vergne.

Soit l un élément de $\mathfrak{g}^*$. Prenons une polarisation $\mathfrak{b}$ en l satisfaisant la condition de Pukanszky. Pour une telle polarisation, définissons $\pi_{l,\mathfrak{b}}$ par :

$$\pi_l = \pi_{l,\mathfrak{b}} = \operatorname{ind}_B^G \chi_l.$$

Théorème 1.1. *$\pi_{l,\mathfrak{b}}$ est une représentation irréductible de G et sa classe d'équivalence $[\pi_{l,\mathfrak{b}}]$ dépend uniquement de l'orbite coadjointe de l. Chaque représentation irréductible π est équivalente à une représentation induite $\pi_{l,\mathfrak{b}}$ d'un caractère χ_l d'une polarisation de Pukanszky.*
De plus, l'application suivante, appelée **l'application de Kirillov-Bernat-Pukanszky-Vergne** *ou plus simplement* **l'application de Kirillov**

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{K}: & \mathfrak{g}^*/G & \longrightarrow & \widehat{G} \\ & G\cdot l & \longmapsto & [\pi_{l,\mathfrak{b}}] =: \pi_{G\cdot l} \end{array}$$

est un homéomorphisme.

Démonstration. Pour les détails, voir [L-L]. □

1.5 Représentations intégrées

Soit π une représentation unitaire irréductible de G.

Elle provient d'une forme linéaire $l \in \mathfrak{g}^\star$ et d'une polarisation de Pukanszky $B = \exp \mathfrak{b}$ en l, i.e., $\pi = \pi_{l,\mathfrak{b}}$.

Soit $f \in L^1(G)$, on lui associe sa transformée de Fourier en π, définie par l'opérateur

$$\pi(f) = \int_G f(g)\pi(g)\ dg \ , \tag{5.7}$$

Cette représentation de $L^1(G)$, appelée aussi représentation intégrée, est définie sur $L^2(G/B,\chi_l)$, le même espace que π.

Cette représentation agit sur $L^2(G/H,\chi_l)$ de la manière suivante, pour $\xi \in \mathcal{H}_\pi$:

$$\pi(f)\xi : \begin{pmatrix} G & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_G f(g)\big(\pi(g)\xi\big)(x)\ dg \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_\pi \quad .$$

Proposition 1.2. *Pour toute fonction $f \in L^1(G)$, l'opérateur $\pi(f)$ donné par* (5.7) *est un opérateur à noyau. L'application $F_\pi : f \longmapsto F_\pi(f)$, associant à $f \in L^1(G)$ le noyau de l'opérateur $\pi(f)$, est donnée par*

$$F_\pi(f)(x,y) = \Delta_G^{-1}(y)\int_B \Delta_{G,B}(b)^{\frac{1}{2}}\ f(xby^{-1})\chi_l(b)\ db, \quad (x,y) \in G\times G. \tag{5.8}$$

Remarques. 1. Il est facile de vérifier que $F_\pi(f)$ satisfait la relation de covariance :

$$F_\pi(f)(xb, yb') = \overline{\chi_l(b)}\chi_l(b')F_\pi(f)(x,y), \quad \forall x,y \in G, \forall b,b' \in B. \tag{5.9}$$

L'ensemble des fonctions $F : G\times G \longrightarrow \mathbb{C}$, vérifiant cette relation de covariance et qui s'identifient, -moyennant le difféomorphisme E_B-, avec des fonctions de $C_c^\infty(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p)$, sera noté $C_c^\infty(G/B\times G/B\ ;\chi_l)$.

2. Si on suppose que G est unimodulaire, la formule (5.8) se simplifie

$$F_\pi(f)(x,y) = \int_B f(xby^{-1})\chi_l(b)\ db, \quad (x,y)\in G\times G. \tag{5.10}$$

Dans ce cas, étudions la transformation des noyaux le long d'une orbite coadjointe.

Considérons les formes linéaires l et l' sur $\mathfrak{g}^*$ dans la même G-orbite coadjointe, i.e., $l' = g.l$ pour un certain $g \in G$.

Soient $\pi_l = \mathrm{ind}_{B(l)}^G \chi_l$ et $\pi_{l'} = \mathrm{ind}_{B(l')}^G\chi_{l'}$ et comparons les noyaux $F_{\pi_l}(f)$ et $F_{\pi_{l'}}(f)$.

Les polarisations de Vergne respectives en l et l' vérifient clairement

$$\mathfrak{b}(l') = Ad(g).\mathfrak{b}(l) \text{ et on a } B(l') = \exp\mathfrak{b}(l') = g.B(l).g^{-1}.$$

Comme ces deux formes linéaires sont dans la même orbite, on peut supposer qu'elles opèrent sur le même espace de représentation $\mathcal{H}$, alors, pour $\xi \in \mathcal{H}, x \in G$,

$$\begin{aligned}
(\pi_{l'}(f)\xi)(x) &= \int_{G/B(l')} F_{\pi_{l'}}(f)(x,y)\xi(y)d\dot{y} \\
&= \int_{G/B(l')} \int_{g.B(l).g^{-1}} f(x.\widetilde{h}.y^{-1})\chi_{l'}(\widetilde{h})d\widetilde{h}\xi(y)d\dot{y} \\
&= \int_{G/B(l')} \int_{B(l)} f((x.g).h.(y.g)^{-1})\chi_{l'}(g.h.g^{-1})dh\xi(y)d\dot{y} \\
&= \int_{G/B(l')} \int_{B(l)} f((x.g).h.(y.g)^{-1})\chi_{l}((g^{-1}.g).h.(g^{-1}.g))dh\xi(y)d\dot{y} \\
&= \int_{G/B(l')} F_{\pi_l}(f)(x.g,y.g)\xi(y)d\dot{y}.
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$F_{\pi_{g.l}}(f)(x,y) = F_{\pi_l}(f)(x.g,y.g),\ x,y \in G. \tag{5.11}$$

3. Supposons que G est unimodulaire et que $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X \oplus \mathfrak{g}_0$, où $\mathfrak{g}_0$ est un idéal de codimension un dans $\mathfrak{g}$. Supposons que l'orbite coadjointe passant par l est saturée par rapport à G_0, c'est-à-dire que $\mathfrak{g}(l) \subset \mathfrak{g}_0$.

Notons $l_0 = l|_{\mathfrak{g}_0}$.

Dans ce cas, chaque polarisation $\mathfrak{b}$ en l_0 dans $\mathfrak{g}_0$ est aussi une polarisation en l dans $\mathfrak{g}$.

Notons $B = \exp \mathfrak{b}$, $\pi_l := \mathrm{ind}_B^G \chi_l$ et $\pi_{l_0} := \mathrm{ind}_B^{G_0} \chi_{l_0}$ pour les représentations induites correspondantes de G et G_0. Alors π_l est équivalente à $\mathrm{ind}_{G_0}^G \pi_{l_0}$. On la décrit de la manière suivante :

Notons $\xi(t, g_0) = \xi(t)(g_0) := \xi(\exp(tX)g_0)$ pour $\xi \in \mathfrak{H}_{\pi_l}$, l'espace de Hilbert sur lequel π_l agit.

Alors, pour presque tout t on a $\xi(t, \cdot) = \xi(t)(\cdot) \in \mathfrak{H}_{\pi_{l_0}}$, l'espace de Hilbert de la représentation π_{l_0}, l'équivalence unitaire entre π_l et $\mathrm{ind}_{G_0}^G \pi_{l_0}$ étant réalisée par l'application $\xi \in \mathfrak{H}_{\pi_l} \mapsto \xi(\cdot)(\cdot) \in L^2(\mathbb{R}, \mathfrak{H}_{\pi_{l_0}})$, muni de la bonne relation de covariance.

Pour $f \in \mathcal{S}(G)$, posons $f(s)(\cdot) = f(s, \cdot) \in \mathcal{S}(G_0)$ avec $f(s)(g_0) = f(s, g_0) := f(\exp(sX)g_0)$.

On obtient

$$\begin{aligned}
\Big(\pi_l(f)\xi\Big)(s)(u) &= \int_G f(g)\Big(\pi_l(g)\xi\Big)(s)(u)dg \\
&= \int_G f(g)\xi(g^{-1}\exp(sX)u)dg
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_G f(g^{-1})\xi(g\exp(sX)u)dg \\
&= \int_G f(\exp(sX)g^{-1})\xi(gu)dg \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{G_0} f(\exp(sX)g_0^{-1}\exp(-tX))\xi(\exp(tX)g_0u)dg_0dt \\
&= \int_{\mathbb{R}}\Big[\int_{G_0} f(\exp((s-t)X)[\exp(tX)g_0\exp(-tX)]^{-1})\xi(\exp(tX)g_0u)dg_0\Big]dt \\
&= \int_{\mathbb{R}}\Big[\int_{G_0} f(s-t,[\exp(tX)g_0\exp(-tX)]^{-1})\xi(t)(g_0u)dg_0\Big]dt \\
&= \int_{\mathbb{R}}\Big[\int_{G_0} f(s-t,\exp(tX)g_0\exp(-tX))\xi(t)(g_0^{-1}u)dg_0\Big]dt \\
&= \int_{\mathbb{R}}\Big[\int_{G_0} {}^t\big(f(s-t)\big)(g_0)\xi(t)(g_0^{-1}u)dg_0\Big]dt \\
\Big(\pi_l(f)\xi\Big)(s)(u) &= \int_{\mathbb{R}} \pi_{l_0}\Big({}^t\big(f(s-t)\big)\Big)\xi(t)(u)dt,
\end{aligned}
$$

pour tout $u \in G_0$, où ${}^t\varphi(v)$ est définie par ${}^t\varphi(v) = \varphi(\exp(tX)v\exp(-tX))$.

Donc

$$\Big(\pi_l(f)\xi\Big)(s) = \int_{\mathbb{R}} \pi_{l_0}\Big({}^t\big(f(s-t)\big)\Big)\xi(t)dt,$$

i.e., $\pi_l(f)$ peut être vue comme l'opérateur défini par l'opérateur à noyau suivant

$$\pi_{l_0}\Big({}^t\big(f(s-t)\big)\Big), \tag{5.12}$$

agissant sur $L^2(\mathbb{R}, \mathfrak{H}_{\pi_{l_0}})$, car l'application $t \mapsto \xi(t)$ est dans $L^2(\mathbb{R}, \mathfrak{H}_{\pi_{l_0}})$.

1.6 Cas particulier des groupes de Lie nilpotents

Le matériel suivant est standard et est traité dans de nombreux ouvrages, voir par exemple [C-G].

Dans cette section, nous supposerons que $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente et $G = \exp\mathfrak{g}$ le groupe de Lie connexe, simplement connexe correspondant.

Dans ce cas, on sait qu'il existe une suite de Jordan-Hölder

$$\{0\} = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}.$$

Fixons une telle suite, ainsi on obtient la base de Malcev associée

$$\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

en prenant $X_i \in \mathfrak{g}_i \setminus \mathfrak{g}_{i-1}$.

Dans $\mathfrak{g}^*$, on considère sa base duale $\{X_1^*, X_2^*, \cdots, X_n^*\}$.

1.6.1 Paramétrisation des orbites coadjointes

Pour $l \in \mathfrak{g}^*$, notons encore $\Omega_l = \mathrm{Ad}^*(G)(l) = G \cdot l$ l'orbite passant par l sous l'action coadjointe et soit

$$\mathfrak{g}(l) = \{X \in \mathfrak{g} \mid \; < l, [X, \mathfrak{g}] >= \{0\}\}$$

l'algèbre de Lie du stabilisateur de l.

Définition 1.2. Position générale au sens de Pukanszky.

Un indice $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ est appelé **indice de saut** pour l si

$$\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{g}_j \supsetneq \mathfrak{g}(l) + \mathfrak{g}_{j-1}.$$

Posons

$$e(l) = \{j \mid j \text{ est un indice de saut pour } l\}$$

l'ensemble des indices de saut pour l.

On peut montrer qu'il existe deux ensembles disjoints $S, T \subset \{1, 2, \dots, n\}$ tels que $S \cup T = \{1, 2, \dots, n\}$ et tels que les assertions suivantes soient vérifiées : la fonction P définie sur $\mathfrak{g}^*$ par

$$P(l) = \det\big(< l, [X_i, X_j] >\big)_{i,j \in S}$$

est un polynôme G-invariant sur $\mathfrak{g}^*$ et l'ensemble $\mathcal{U} = \{l \in \mathfrak{g}^* \mid e(l) = S\}$ de $\mathfrak{g}^*$ est obtenu par

$$\mathcal{U} = \{l \in \mathfrak{g}^* \mid P(l) \neq 0\}.$$

Donc $\mathcal{U}$ est un ouvert de Zariski, G-invariant, i.e., un ouvert dense de $\mathfrak{g}^*$ et ses éléments sont dits en **position générale** ou **génériques au sens de Pukanszky** pour la suite de Jordan-Hölder donnée.

Notons $\mathfrak{g}^*_{Puk} = \mathcal{U}$.

En fait, les ensembles $\mathcal{U}$ et S sont définis par la condition suivante :

si on note $V_j = \mathfrak{g}_j^\perp =< X_{j+1}^*, \ldots, X_n^* >$, alors $l \in \mathcal{U}$ si et seulement si la dimension de l'orbite de l (mod V_j) dans $\mathfrak{g}^*/V_j$ est maximale pour chaque j.

On peut alors montrer que les éléments de $\mathcal{U}$ ont tous le même ensemble d'indices de saut, noté S et réciproquement que chaque l admettant S comme ensemble d'indices est dans $\mathcal{U}$ (voir [C-G]).

Les ensembles $\mathfrak{g}_{Puk}^*, S, T$ dépendent bien-sûr du choix de la suite de Jordan-Hölder.

Il existe une paramétrisation des orbites des éléments de $\mathcal{U}$: soit $S = \{j_1 < j_2 < \cdots < j_{2d}\}$, notons $l = \sum_{i=1}^n l_i X_i^*$ et identifions l avec un élément de $\mathbb{R}^n$. Il existe des fonctions $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ vérifiant :

(i) Les fonctions $Q_i(l,t)$ sont rationnelles non-singulières sur $\mathcal{U} \times \mathbb{R}^{2d}$. Pour l fixé dans $\mathcal{U}$, ce sont des polynômes en $t \in \mathbb{R}^{2d}$.

(ii) Pour chaque $l = \sum_{i=1}^n l_i X_i^*$ fixé dans $\mathcal{U}$, la fonction $Q(l,t) = \sum_{i=1}^n Q_i(l,t) X_i^*$ envoie $\mathbb{R}^{2d}$ difféomorphiquement sur l'orbite $G \cdot l$, qui est une sous-variété fermée de $\mathfrak{g}^*$.

(iii) Pour l fixé, la fonction $Q_j(l,t)$ dépend uniquement des t_i tels que $j_i \leq j$.

(iv) Si $j \notin S$, alors $Q_j(l,t) = l_j + R_j(l_1, \ldots, l_{j-1}, t_1, \ldots, t_i)$ où i est le plus grand indice tel que $j_i < j$ et R_j est rationnel. De plus, $Q_1(l,t) = l_1$.

(v) $Q_{j_i}(l,t) = t_i$.

(vi) $\mathcal{U}$ est G-invariant et si $t \in \mathbb{R}^{2d}$ est fixé, chaque $Q_j(l,t)$ est une fonction rationnelle non-singulière sur $\mathcal{U}$, constante sur les G-orbites.

(vii) Pour $N \in \mathbb{N}$ suffisamment grand , les fonctions $P(l)^N Q_j(l,t)$ et $P(l)^N R_j(l,t)$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sont des polynômes. (Voir [C-G])

Remarque. Il existe autre manière de paramétriser les orbites coadjointes introduites dans [L-Z]. Nous utiliserons cette méthode et l'adapterons aux groupes de Lie nilpotents variables (voir chapitre 3).

1.6.2 Formule de Plancherel

Comme ci-dessus, considérons les ensembles définis S, $T = \{1, \ldots, n\} \setminus S$ et posons

$$V_T = \sum_{j \in T} \mathbb{R}X_j^* \subset \mathfrak{g}^* \text{ et } V_S = \sum_{j \in S} \mathbb{R}X_j^* \subset \mathfrak{g}^*.$$

Alors $\mathfrak{g}^* = V_T \oplus V_S$ et l'ensemble $\mathcal{U} \cap V_T$ est une section des orbites coadjointes en position générale, c'est-à-dire, coupe chaque orbite coadjointe en position générale en un seul point.

Soit $\mu = |Pf(l)|dl$ la mesure de Plancherel, .

Considérons $Pf(l)$ le Pfaffien défini par

$$|Pf(l)| = \big(P(l)\big)^{\frac{1}{2}} = \big(\det(< l, [X_i, X_j] >)_{i,j \in S}\big)^{\frac{1}{2}}.$$

Alors la mesure $d\mu = |Pf(l)|dl$ est une mesure de Plancherel sur $\widehat{G}$, qui est basée sur $V_T \cap \mathfrak{g}^*_{Puk}$. La mesure dl désigne la mesure de Lebesgue sur V_T telle que le volume du cube unité de V_T soit égal à 1.

Rappelons le théorème de Plancherel :

Théorème 1.2. *(i) Si G est un groupe de Lie nilpotent, dx est une mesure de Haar fixée sur G et $\mu = |Pf(l)|dl$ la mesure de Plancherel correspondante, alors*

$$A : L^2(G) \to \int_{\widehat{G}} HS(\mathcal{H}_\pi) d\mu(\pi)$$

est une isométrie. Ici $HS(\mathcal{H}_\pi)$ désigne les opérateurs de Hilbert-Schmidt sur $\mathfrak{H}_\pi$. Si $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$, alors la formule précédente signifie que

$$Af = \int_{\widehat{G}} \pi(f) d\mu(\pi) = \int_{V_T \cap \mathfrak{g}^*_{Puk}} \pi_l(f)|Pf(l)|dl.$$

(ii) Si $\pi_l(f)$ et $\pi_l(g)$ ont comme noyaux les fonctions $F(l, \cdot, \cdot)$ et $G(l, \cdot, \cdot)$, alors

$$< f, g >= \int_{V_T \cap \mathfrak{g}^*_{Puk}} \operatorname{tr}\Big(\pi_l(f)\pi_l(g^*)\Big)|Pf(l)|dl = \int_{V_T \cap \mathfrak{g}^*_{Puk}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} F(l, x, y)\overline{G(l, x, y)}|Pf(l)|dxdydl$$

et

$$\|f\|_2^2 = \int_{V_T \cap \mathfrak{g}^*_{Puk}} \|\pi_l(f)\|^2_{HS} |Pf(l)| dl = \int_{V_T \cap \mathfrak{g}^*_{Puk}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |F(l,x,y)|^2 |Pf(l)| dx dy dl.$$

Remarque. En particulier en utilisant la formule (5.12) de la section précédente, on obtient la relation suivante pour les normes de Hilbert-Schmidt :

$$\|\pi_l(f)\|^2_{HS} = \int_{\mathbb{R}^2} \|\pi_{l_0}\big({}^t f(s-t)\big)\|^2_{HS} ds dt$$

Chapitre 2

Transformation de Fourier L^p dans les groupes de Lie fortement $*$-réguliers

2.1 Introduction

Soit G un groupe localement compact séparable unimodulaire de type I et $\widehat{G}$ son dual unitaire, l'ensemble de ses classes d'équivalence de représentations irréductibles unitaires muni de sa structure de Borel-Mackey. Soit dg la mesure de Haar sur G. La transformée de Fourier à valeurs opérationnelles sur G envoie chaque $\varphi \in L^1(G)$ dans le champ d'opérateurs bornés, $\mathcal{F}(\varphi) = (\pi(\varphi))_{\pi\in\widehat{G}}$ sur $\widehat{G}$, où $\pi(\varphi)$ est défini par

$$\pi(\varphi) = \int_G \varphi(g)\pi(g)dg.$$

Soit μ la mesure de Plancherel $\widehat{G}$, qui est uniquement déterminée par la formule de Plancherel abstraite : pour $\varphi \in L^1(G) \cap L^2(G)$,

$$\int_G |\varphi(g)|^2 dg = \int_{\widehat{G}} \mathrm{tr}((\pi(\varphi)^*\pi(\varphi))d\mu(\pi).$$

L'inégalité de Hausdorff-Young (voir [Ku]), établie pour un groupe séparable localement compact unimodulaire de type I, est donnée par

$$\Big(\int_{\widehat{G}} \|\pi(\varphi)\|^q_{C_q} d\mu(\pi)\Big)^{\frac{1}{q}} \leq \Big(\int_G |\varphi(g)|^p dg\Big)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.1}$$

où $\varphi \in L^1(G) \cap L^p(G),\ 1 < p \leq 2,\ q$ est l'exposant conjugué de p, i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et

$$\|\pi(\varphi)\|_{C_q}^q = \mathrm{tr}\Big((\pi(\varphi)^*\pi(\varphi))^{\frac{q}{2}}\Big).$$

Etant donné un champ $\mu-$mesurable d'opérateurs bornés F sur $\widehat{G}$, posons

$$\|F\|_q = \Big(\int_{\widehat{G}} \|F(\pi)\|_{C_q}^q d\mu(\pi)\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Ainsi l'inégalité (1.1) devient

$$\|\mathcal{F}(\varphi)\|_q \leq \|\varphi\|_p.$$

Donc l'application $\varphi \mapsto \mathcal{F}\varphi$ de $L^1(G) \cap L^p(G)$ dans $L^q(\widehat{G})$ s'étend en un opérateur continu $\mathcal{F}^p : L^p(G) \to L^q(\widehat{G})$ et sa norme d'opérateur est majorée par

$$\|\mathcal{F}^p(G)\| = \sup_{\|\varphi\|_p \leq 1} \|\mathcal{F}(\varphi)\|_q \leq 1.$$

Il est prouvé dans [Fo], que $\|\mathcal{F}^p(G)\| = 1$ si et seulement si G contient un sous-groupe compact ouvert.

Dans ce chapitre nous allons donner une estimation de la norme $\|\mathcal{F}^p(G)\|$ pour une certaine classe de groupes de Lie résolubles. Beckner [Be] a traité le cas des groupes abéliens $G = \mathbb{R}^n$ et a obtenu la norme $\|\mathcal{F}^p(\mathbb{R}^n)\| = A_p^n$, où $A_p = \Big(\frac{p^{\frac{1}{p}}}{q^{\frac{1}{q}}}\Big)^{\frac{1}{2}}$.

De nombreux résultats ont été obtenus pour d'autres types de groupes (voir [Ba],[Be],[Fo], [F-R],[In],[Ru1]). Récemment, ces travaux ont été généralisés dans [B-S-L] :

Théorème 2.1. *Soient G un groupe de Lie nilpotent connexe, simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et m la dimension des orbites coadjointes génériques. Alors pour $1 < p \leq 2$, on a :*

$$\|\mathcal{F}^p(G)\| \leq A_p^{\frac{2dimG-m}{2}}. \tag{1.2}$$

Dans le cas des groupes localement compacts non-unimodulaires de type I, il existe un champ d'opérateurs positifs auto-adjoints non nuls $(K_\pi)_{\pi\in\widehat{G}}$ et une mesure μ sur $\widehat{G}$ tels que pour $\varphi \in L^1(G) \cap L^2(G)$ et pour $\mu-$presque partout $\pi \in \widehat{G}$ l'opérateur $\pi(\varphi)K_\pi^{\frac{-1}{2}}$ s'étend en un opérateur d'Hilbert-Schmidt sur $\mathcal{H}_\pi$, l'espace de π, de plus $K_\pi^{\frac{-1}{2}}\pi(\varphi)K_\pi^{\frac{-1}{2}}$ est un opérateur à trace. Alors la formule de Plancherel s'écrit (voir [D-R]) :

$$\|\varphi\|_2^2 = \int_{\widehat{G}} \mathrm{tr}\ \big(K_\pi^{\frac{-1}{2}}\pi(\varphi^* * \varphi)K_\pi^{\frac{-1}{2}}\big)d\mu(\pi).$$

En définissant la transformée de Fourier par le champ à valeurs opérationnelles suivant :

$$\mathcal{F}(\varphi) = \big(\pi(\varphi)K_\pi^{\frac{-1}{q}}\big)_{\pi\in\widehat{G}},$$

Terp [Te] et Führ [Fu] ont étendu le théorème de Hausdorff-Young dans ce cas.

Eymard, Terp [E-T] et Russo [Ru2] ont obtenu une estimation plus précise de la norme $\|\mathcal{F}^p(G)\|$ pour le groupe des transformations affines de la droite réelle, appelé le groupe "ax+b".

Une extension de ces résultats à une certaine classe de groupes de Lie complètement résolubles a été donnée par Inoue : les groupes de Lie connexes, simplement connexes $G = \exp\mathfrak{g}$, où $\mathfrak{g}$ est une $j-$algèbre normale qui est caractérisée par le fait que G est un groupe d'automorphismes affines agissant simplement et transitivement sur un domaine de Siegel de type II (voir [In]). On étudiera cet exemple dans la section 2.4.3.

Notre étude porte sur une classe de groupes de Lie exponentiels fortement $*$-réguliers (voir définitions 2.1 plus loin).

Notre résultat principal est le suivant :

Théorème 2.2. *Soit G un groupe de Lie résoluble exponentiel possédant la condition de $*$-régularité forte. Soit m la dimension maximale des orbites coadjointes.*

Soient $1 < p \leq 2$ et q l'exposant conjugué de p. Alors pour tout $\varphi \in L^1(G)\cap L^p(G)$ et μ-presque toute représentation $\pi \in \widehat{G}$, l'opérateur $\pi^p(\varphi) := \pi(\varphi)K_\pi^{\frac{-1}{q}}$ est borné, son extension est de classe C_q et on a l'inégalité suivante :

$$\Big(\int_{\widehat{G}} \|\pi^p(\varphi)\|_{C_q}^q d\mu(\pi)\Big)^{\frac{1}{q}} \leq A_p^{\frac{2dimG-m}{2}}\|\varphi\|_p.$$

2.2 Formule de Plancherel localisée

2.2.1 Plusieurs décompositions

La formule de Plancherel pour les groupes de Lie exponentiels a été obtenue par Duflo et Rais dans [D-R].

Soit $Z = \exp\mathfrak{z}$ le centre de G. Soient $A = \exp\mathfrak{a}$ un sous-groupe fermé connexe de Z et χ_ψ le caractère unitaire de A associé à la forme linéaire fixée $\psi \in \mathfrak{a}^*$.

Posons

$$\mathfrak{g}^*_\psi = \{l \in \mathfrak{g}^* \ : \ l_{|\mathfrak{a}} = \psi\} \ \text{ et} \tag{2.3}$$

$$\widehat{G}_{\chi_\psi} = \{\pi \in \widehat{G} \ : \ \pi_{|A} = \chi_\psi.\mathrm{Id}\}.$$

On en déduit, d'après [L-L], que l'espace des orbites $\mathfrak{g}^*_\psi/G$ est homéomorphe à $\widehat{G}_{\chi_\psi}$ via l'application de Kirillov.

Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace $L^p(G/A, \chi_\psi)$ est l'ensemble des fonctions mesurables $\varphi : G \to \mathbb{C}$ telles que $\varphi(ga) = \overline{\chi_\psi(a)}\varphi(g)$ pour tout $g \in G$, $a \in A$ et

$$\|\varphi\|^p_{L^p(G/A,\chi_\psi)} = \int_{G/A} |\varphi(g)|^p dg < \infty.$$

Pour $p = 1$, on obtient une $*$-algèbre de Banach pour le produit de convolution défini, pour φ et φ' dans $L^1(G/A, \chi_\psi)$, par :

$$\varphi * \varphi'(g) = \int_{G/A} \varphi(u)\varphi'(u^{-1}g)du, \ \ g \in G/A$$

et l'involution * par :

$$f^*(x) = \Delta_G(x^{-1})\overline{f(x^{-1})}, \quad x \in G, \ f \in L^1(G/A, \chi_\psi).$$

Naturellement l'espace $\widehat{G}_{\chi_\psi}$ est aussi l'espace dual de l'algèbre $L^1(G/A, \chi_\psi)$.

Désignons par $\Omega_\psi \in g^*_\psi/G$ une orbite coadjointe dans $\mathfrak{g}^*_\psi$ et par $\pi_{\Omega_\psi} \in \widehat{G}_{\chi_\psi}$ la représentation correspondante de G.

D'après [Pu], il existe une fonction rationnelle non nulle ξ définie sur $\mathfrak{g}^*$ telle que :

$$\xi(x \cdot l) = \Delta_G(x^{-1})\xi(l) \text{ pour tout } x \in G \text{ et } l \in \mathfrak{g}^*. \tag{2.4}$$

Fixons une telle fonction ξ. Il existe une unique mesure $\mu_{\xi,\psi}$ sur $\mathfrak{g}^*_\psi/G$ telle que, pour toute fonction borélienne ϕ sur $\mathfrak{g}^*$, on a d'après [D-R]

$$\int_{\mathfrak{g}^*_\psi} \phi(l)|\xi(l)|dl = \int_{\mathfrak{g}^*_\psi/G} \int_{\Omega_\psi} \phi(l)d\beta_{\Omega_\psi}(l)d\mu_{\xi,\psi}(\Omega_\psi), \tag{2.5}$$

où $d\beta_{\Omega_\psi}$ est la mesure canonique sur Ω_ψ.

Alors $d\mu_{\xi,\psi}$ est la mesure de Plancherel localisée sur $\mathfrak{g}^*_\psi/G \simeq \widehat{G}_{\chi_\psi}$.

Rappelons le fait que, si π est une représentation irréductible de G dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\pi$, alors d'après [D-M], il existe un unique opérateur auto-adjoint et positif K_π dans $\mathcal{H}_\pi$ qui est **semi-invariant de poids** Δ^{-1}, ce qui signifie que :

$$\pi(g)K_\pi\pi(g)^{-1} = \Delta_G(g)^{-1}K_\pi,\ \forall g \in G.$$

Dans le cas où $\pi = \pi_{l,\mathfrak{b}}$ et $\Delta_{G|B} \equiv 1$, K_π n'est rien d'autre que l'opérateur de multiplication par la fonction $\widetilde{\xi}$, où $\widetilde{\xi}$ est définie par : $\widetilde{\xi}(x) = \xi(x \cdot l),\ \forall x \in G$ (voir [D-R]).

Alors, pour chaque $\phi \in C_c^\infty(G)$, pour presque toute orbite $\Omega_\psi \in \mathfrak{g}_\psi^*/G$, l'opérateur $K_\pi^{\frac{-1}{2}}\pi_{\Omega_\psi}(\phi)K_\pi^{\frac{-1}{2}}$ est à trace et

$$\mathrm{tr}(K_\pi^{\frac{-1}{2}}\pi_{\Omega_\psi}(\phi)K_\pi^{\frac{-1}{2}}) = \int_{\Omega_\psi}(\Gamma\cdot(\phi\circ\exp))^\wedge(l)|\xi(l)|^{-1}d\beta_{\Omega_\psi}(l),$$

où Γ est une fonction positive $\mathrm{Ad}(G)$-invariante sur $\mathfrak{g}$, qui ne dépend pas de ξ.

D'après [D-M] et [D-R] la formule de Plancherel s'écrit

$$\|\phi\|_2^2 = \int_{\mathfrak{g}_\psi^*/G}\mathrm{tr}(K_\pi^{\frac{-1}{2}}\pi_{\Omega_\psi}(\phi^* * \phi)K_\pi^{\frac{-1}{2}})d\mu_{\xi,\psi}(\Omega_\psi). \tag{2.6}$$

D'autre part, on obtient une décomposition de la mesure de Plancherel pour une fonction mesurable F sur $\widehat{G}$:

$$\int_{\mathfrak{g}^*/G}F(\pi_\Omega)d\mu(\Omega) = \int_{\mathfrak{a}^*}\int_{\mathfrak{g}_\psi^*/G}F(\pi_{\Omega_\psi})d\mu_{\xi,\psi}(\Omega_\psi)d\psi.$$

Soit $\mathfrak{a}_0$ le noyau de ψ et $A_0 = \exp\mathfrak{a}_0$.

Consiérons $P : G \longrightarrow G/A_0$, la projection canonique et $\bar{\chi}_{\bar{\psi}}$ le caractère de A/A_0 associée à $\bar{\psi} \in (\mathfrak{a}/\mathfrak{a}_0)^*$, défini par la formule : $\bar{\chi}_{\bar{\psi}} \circ P_{|A} = \chi_\psi$.

On en déduit que, pour $1 \le p < +\infty$

$$L^p(G/A,\psi) = L^p((G/A_0)/(A/A_0),\overline{\psi}) \tag{2.7}$$

et $A' = A/A_0$ est un sous-groupe central de $G' = \exp\mathfrak{g}' = G/A_0$.

Remarquons que $L^q(\widehat{G}_{\chi_\psi})$ est isométriquement isomorphe à $L^q(\widehat{G'}_{\chi_{\bar{\psi}}})$, d'après la formule de Plancherel (2.6), si q est l'exposant conjugué de p.

2.2.2 La position générale

Supposons à présent que G n'est plus unimodulaire.

Soit $G_0 = \exp \mathfrak{g}_0$ le noyau de la fonction module Δ_G de G.

Alors $\mathfrak{g}_0$ est un idéal de codimension un de $\mathfrak{g}$ et il existe un ouvert dense $\mathfrak{g}^*_{\mathrm{gen}}$ de $\mathfrak{g}^*$ tel que l'orbite coadjointe d'un élément dans $\mathfrak{g}^*_{\mathrm{gen}}$ est de dimension maximale et est saturée par rapport à $\mathfrak{g}_0$.

Les éléments dans $\mathfrak{g}^*_{\mathrm{gen}}$ sont dits **génériques ou en position générale.**

Soit $X \in \mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathbb{R}X$. Soit μ_0 la mesure de Plancherel de $\widehat{G}_0$. Le groupe $G/G_0 \simeq \exp \mathbb{R}X$ agit par conjugaison sur $\widehat{G}_0$. Calculons la mesure de Plancherel μ_0 de $\widehat{G}_0$ à partir de μ et de l'action de G/G_0 sur $\widehat{G}_0$.

Soit $p^* : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}_0^*$ la projection canonique et soit l_0 la restriction à $\mathfrak{g}_0$ d'un élément $l \in \mathfrak{g}^*$. Si l est générique, alors $\mathfrak{g}(l)$ est un idéal de codimension un dans $\mathfrak{g}_0(l_0)$ et son orbite Ω_l vérifie :

$$p^*(\Omega_l) = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \mathrm{Ad}^*(\exp tX)\Omega^0_{l_0},$$

où $\Omega^0_{l_0}$ est la G_0-orbite de l_0.

Pour $t \in \mathbb{R}$ et $(\pi_0, \mathcal{H}_{\pi_0}) \in \widehat{G}_0$, on définit la représentation $\exp(tX)\cdot\pi_0$ sur $\mathcal{H}_{\pi_0}$ par :

$$\exp(tX)\cdot\pi_0(g_0) = \pi_0(\exp(-tX)g_0\exp(tX)) =: \pi_0^t(g_0), \quad g_0 \in G_0.$$

Pour $l \in \mathfrak{g}^*$ générique, le stabilisateur $\mathfrak{g}(l)$ est nilpotent. Donc pour ces formes linéaires l, on a :

$$\Delta_G(s) = \Delta_{G(l)}(s) = 1, \text{ pour tout } s \in G(l) \tag{2.8}$$

(voir le chapitre II dans [B-A]).

Ce qui prouve que $G(l) \subset G_0$ et que les orbites coadjointes passant par ces formes l sont saturées par rapport $\mathfrak{g}_0$. En particulier, toute polarisation de Pukanszky $\mathfrak{p}$ en l_0 est aussi une polarisation de Pukanszky en $l \in \mathfrak{g}^*_{\mathrm{gen}}$.

Prenons $l \in \mathfrak{g}^*_{\mathrm{gen}}$ et $a \in \mathfrak{g}_0^\perp$. Il existe $t \in G_0(l_0) \subset G_0$ tel que $l + a = \mathrm{Ad}^*(t)l$ et ainsi d'après (2.8)

$$\xi(l+a) = \xi(\mathrm{Ad}^*(t)l) = \Delta_G(t^{-1})\xi(l) = \xi(l). \tag{2.9}$$

On peut ainsi définir une fonction $\check{\xi}$ sur les éléments génériques dans $\mathfrak{g}_0^*$ en posant :

$$\check{\xi}(l_0) := \xi(l), \quad l \in \mathfrak{g}^*, l_{|\mathfrak{g}_0} = l_0. \tag{2.10}$$

Cette fonction $\check{\xi}$ est rationnelle (comme ξ l'est) et d'après (2.4), on a

$$\check{\xi}(x \cdot l_0) = \Delta_G(x^{-1})\check{\xi}(l_0) \text{ pour tout } x \in G \text{ et } l_0 \in \mathfrak{g}_0^*. \tag{2.11}$$

En particulier, la fonction $\check{\xi}$ est G_0-invariante.

Soit ξ_0 une fonction borélienne positive sur $\widehat{G}_0$ définie par :

$$\xi_0(\pi_{l_0}) := \check{\xi}(l_0)$$

et soit U l'ensemble borélien de $\widehat{G}_0$ défini par :

$$U := \{\pi_0 \in \widehat{G}_0, \quad \xi_0(\pi_0) = 1\}.$$

Ainsi on a, pour $\pi_0 \in U$:

$$\xi_0(\exp(tX) \cdot \pi_0) = \check{\xi}(\exp(tX) \cdot l_0) = \Delta_G^{-1}(\exp(tX)).$$

D'après Duflo et Moore (voir [D-M] Théorème 6), le sous-ensemble borélien G-invariant U de $\widehat{G}_0$ est tel que $V = \mathrm{ind}U = \{\pi = \mathrm{ind}_{G_0}^G \pi_0,\ \pi_0 \in U\}$ est un sous-ensemble mesurable de $\widehat{G}$ tel que $\mu(\widehat{G} - V) = 0$ et quelque soit la fonction mesurable ϕ sur U on a :

$$\int_{\widehat{G}_0} \phi(\pi_0) d\mu_0(\pi_0) = \int_V \int_{\Omega_{\pi_0}} \phi(\exp(tX) \cdot \pi_0)\xi_0(\exp(tX) \cdot \pi_0) dt d\mu(\pi) \tag{2.12}$$

où $\pi_0 \in U$ et $\Omega_{\pi_0} = \exp(\mathbb{R}X) \cdot \pi_0$.

2.2.3 Cas particulier : G unimodulaire

Supposons à présent que G est unimodulaire et $\mathfrak{g}_0$ un idéal de codimension un de $\mathfrak{g}$ qui contient le centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{g}$.

On peut donc supposer que la fonction ξ définie par (2.4) est constante égale à 1 et les formules se simplifient.

Soit $X \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{g}_0$. Le sous-groupe fermé $G_0 = \exp \mathfrak{g}_0$ est unimodulaire et normal dans G. D'après la théorie de Mackey (voir [K-L]), il existe un sous-ensemble borélien $U \subset \widehat{G}_0$ tel que $W = \mathrm{ind}U = \{\mathrm{ind}_{G_0}^G \pi_0 \ :\ \pi_0 \in U\}$ est un sous-ensemble borélien de $\widehat{G}$ vérifiant $\mu(\widehat{G} - W) = 0$.

De plus, on peut supposer que U coupe chaque orbite $\exp(\mathbb{R}X)\cdot\pi_0$, $\pi_0 \in U$, en un seul point π_0 (voir [Ma] Théorème 3.2).

On obtient de cette manière une décomposition de la mesure de Plancherel localisée μ_χ^0 de $(\widehat{G_0})_\chi$: pour tout sous-espace $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{z}$, tout $\chi \in \widehat{A}$ et toute fonction borélienne ϕ sur $(\widehat{G_0})_\chi$:

$$\int_{(\widehat{G_0})_\chi} \phi(\pi_0) d\mu_\chi^0(\pi_0) = \int_{\widehat{G}_\chi} \int_{\mathbb{R}} \phi(\exp(tX)\cdot\pi_0) dt d\mu_\chi(\pi). \tag{2.13}$$

2.3 Inégalité de type Hausdorff-Young pour les opérateurs intégraux

Rappelons cette inégalité, due à Fournier et Russo dans [F-R].

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe et $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ l'espace des opérateurs bornés sur $\mathcal{H}$.

Soient $\mathcal{X}$ un espace de mesure σ-finie et $L^2(\mathcal{X},\mathcal{H})$ l'espace de Hilbert des fonctions à valeurs dans $\mathcal{H}$ de carré intégrables et K un opérateur intégral sur $L^2(\mathcal{X},\mathcal{H})$ dont le noyau à valeurs opérationnelles k est défini par :

$$K\eta(x) = \int_{\mathcal{X}} k(x,y)\eta(y)dy,$$

pour tout $\eta \in L^2(\mathcal{X},\mathcal{H})$, et presque tout $x \in \mathcal{X}$.

Posons $k^*(x,y) = \overline{k(y,x)},\ x,y \in \mathcal{X}$.

Pour p,q dans $[1,+\infty[$, définissons :

$$\|k\|_{p,q} = \Big(\int_{\mathcal{X}} (\int_{\mathcal{X}} \|k(x,y)\|_{C_p}^p dx)^{\frac{q}{p}} dy\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Si $1 < p \leq 2$, q est l'exposant conjugué de p et si $\|k\|_{p,q}$ et $\|k^*\|_{p,q}$ sont finies, alors l'opérateur à noyau K appartient à $C_q(L^2(\mathcal{X},\mathcal{H}))$ et

$$\|K\|_{C_q} \leq \|k\|_{p,q}^{\frac{1}{2}} \|k^*\|_{p,q}^{\frac{1}{2}}. \tag{3.14}$$

Remarque. Inégalité de Minkowski généralisée.

Rappelons l'inégalité de Minkowski généralisée pour les intégrales.

Soient $r \geq 1$ et deux espaces mesurés (X, μ), (Y, ν), alors pour chaque fonction mesurable $F : X \times Y \to \mathbb{C}$, on a

$$\Big(\int_X \Big(\int_Y |F(x,y)| d\nu(y)\Big)^r d\nu(x)\Big)^{\frac{1}{r}} \leq \int_Y \Big(\int_X |F(x,y)|^r d\mu(x)\Big)^{\frac{1}{r}} d\nu(y).$$

2.4 Estimation de la norme de la transformée de Fourier L^p

2.4.1 Induction par un idéal de codimension un

Pour démontrer notre théorème principal, on aura besoin du lemme suivant :

Lemme 2.1. *Soit G un groupe de Lie exponentiel résoluble unimodulaire. Soient $A = \exp \mathfrak{a}$ un sous-groupe fermé du centre Z de G et $\chi = \chi_\psi$, $\psi \in \mathfrak{a}^*$, un caractère unitaire de A.*

Soit $\mathfrak{g}_0 = Lie(G_0)$ un idéal de codimension un de $\mathfrak{g}$ tel que :

i) presque toutes les G-orbites sont saturées par rapport à $\mathfrak{g}_0$

ii) pour $1 < p \leq 2$,

$$\Big(\int_{(\widehat{G_0})_\chi} \|\pi_0(\varphi_0)\|^q_{C_q} d\mu^0_\chi(\pi_0)\Big)^{\frac{1}{q}} \leq A_p^{\frac{2dim(G_0/A)-m^0_\psi}{2}} \|\varphi_0\|_{L^p(G_0/A,\chi)},$$

où $\varphi_0 \in C_c(G_0/A)$ et $m^0_\psi = \sup\Big\{\dim(G_0 \cdot l)\ ;\ l \in \mathfrak{g}^*_{0,\psi}\Big\}$. Alors pour $1 < p \leq 2$,

$$\Big(\int_{\widehat{G}_\chi} \|\pi(\varphi)\|^q_{C_q} d\mu_\chi(\pi)\Big)^{\frac{1}{q}} \leq A_p^{\frac{2dim(G/A)-m_\psi}{2}} \|\varphi\|_{L^p(G/A,\chi)},$$

où $\varphi \in C_c(G/A)$ et $m_\psi = \sup\Big\{\dim(G \cdot l)\ ;\ l \in \mathfrak{g}^*_\psi\Big\}$.

Démonstration. Soient $l \in \mathfrak{g}^*$ telle que $\mathfrak{g}(l) \subset \mathfrak{g}_0$ et $\pi_l \in \widehat{G}$ la représentation correspondante. Nous savons que nous pouvons réaliser la représentation π_l comme

$$\pi_l = \mathrm{ind}_{G_0}^G \pi_{l_0} \text{ avec } l_0 = l_{|\mathfrak{g}_0}.$$

Identifions l'espace $\mathcal{H}$ of π_l à $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_0)$, l'espace des fonctions L^2 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{H}_0$ par rapport à la mesure de Lebesgue dt, $\mathcal{H}_0$ étant l'espace de Hilbert de π_{l_0}.

Pour $\varphi \in C_c(G)$, on rappelle que le noyau $k_{\pi(\varphi)}$ de l'opérateur $\pi(\varphi)$ est donné par la formule (5.12) :

$$k_{\pi_l(\varphi)}(t,s) = \pi_{l_0}^s(\varphi(t-s,\cdot) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0),\ \ s,t \in \mathbb{R},$$

où $\pi_{l_0}^s$ est la représentation de G_0 définie par :

$$\pi_{l_0}^s(g_0) = \pi_{l_0}(\exp(-sX)g_0\exp(sX)),\ \ g_0 \in G_0$$

$$\text{et } \varphi(t,.)(g_0) = \varphi(\exp(tX)g_0) \in C_c(G_0).$$

Calculons à présent la norme de ce noyau :

$$\|k_{\pi_l(\varphi)}\|_{p,q} = \Big(\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}\|k_{\pi_l(\varphi)}(t,s)\|_{C_q}^p dt\Big)^{\frac{q}{p}} ds\Big)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \Big(\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}\|\pi_{l_0}^s(\varphi(t-s,.))\|_{C_q}^p dt\Big)^{\frac{q}{p}} ds\Big)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \Big(\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}\|\pi_{l_0}^s(\varphi(t,.))\|_{C_q}^p dt\Big)^{\frac{q}{p}} ds\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Donc

$$\int_{\mathfrak{g}_\psi^*/G}\|k_{\pi_l(\varphi)}\|_{p,q}^q d\mu_\psi(l) = \int_{\mathfrak{g}_\psi^*/G}\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}\|\pi_{l_0}^s(\varphi(t,.))\|_{C_q}^p dt\Big)^{\frac{q}{p}} ds d\mu_\psi(l)$$

(en utilisant l'inégalité de Minkowski généralisée pour les mesures dt et $dsd\mu_\psi(l)$)

$$\leq \Big(\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathfrak{g}_\psi^*/G}\int_{\mathbb{R}}\|\pi_{l_0}^s(\varphi(t,.))\|_{C_q}^q dsd\mu_\psi(l)\Big)^{\frac{p}{q}} dt\Big)^{\frac{q}{p}}$$

$$= \Big(\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathfrak{g}_{0,\psi}^*/G_0}\|\pi_{l_0}(\varphi(t,.))\|_{C_q}^q\ d\mu_\psi^0(l_0)\Big)^{\frac{p}{q}} dt\Big)^{\frac{q}{p}} \quad (\text{ par la formule (2.13)}).$$

On peut maintenant utiliser les hypothèses de ce lemme et on obtient :

$$\int_{\mathfrak{g}_\psi^*/G}\|k_{\pi_l(\varphi)}\|_{p,q}^q d\mu_\psi(l) \leq A_p^q{}^{\frac{2\dim(G_0/A)-m_\psi^0}{2}}\Big(\int_{\mathbb{R}}\|\varphi(t,.)\|_{L^p(G_0/A,\chi)}^p dt\Big)^{\frac{q}{p}}.$$

Comme les orbites sont saturées, il s'ensuit, par la formule (1.1) du chapitre 1, que $m_\psi^0 = m_\psi - 2$

et ainsi

$$2\dim(G_0/A) - m_{\psi_0} = 2\dim(G/A) - m_\psi.$$

Donc

$$\int_{\widehat{G}_\chi} \|k_{\pi_l(\varphi)}\|_{p,q}^q d\mu_\chi(\pi) \leq A_p^{q\frac{2\dim(G/A)-m_\psi}{2}} \|\varphi\|_{L^p(G/A)}^q.$$

D'après la formule (3.14) et le fait que $k^*_{\pi(\varphi)} = k_{\pi(\varphi^*)}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{\widehat{G}_\chi} \|\pi(\varphi)\|_{C_q}^q d\mu_\chi(\pi) &\leq \int_{\widehat{G}_\chi} \|k_{\pi(\varphi)}\|_{p,q}^{\frac{q}{2}} \|k_{\pi(\varphi^*)}\|_{p,q}^{\frac{q}{2}} d\mu_\chi(\pi) \\
&\leq \Big(\int_{\widehat{G}_\chi} \|k_{\pi(\varphi)}\|_{p,q}^q d\mu_\chi(\pi)\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{\widehat{G}_\chi} \|k_{\pi(\varphi^*)}\|_{p,q}^q d\mu_\chi(\pi)\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq A_p^{q\frac{2\dim G/A-m_\psi}{2}} \|\varphi\|_{L^p(G/A,\chi)}^{\frac{q}{2}} \|\varphi^*\|_{L^p(G/A,\chi)}^{\frac{q}{2}} \\
&= A_p^{q\frac{2\dim G/A-m_\psi}{2}} \|\varphi\|_{L^p(G/A,\chi)}^q.
\end{aligned}$$

On en déduit enfin que :

$$\Big(\int_{\widehat{G}_\chi} \|\pi(\varphi)\|_{C_q}^q d\mu_\chi(\pi)\Big)^{\frac{1}{q}} \leq A_p^{\frac{2\dim G/A-m_\psi}{2}} \|\varphi\|_{L^p(G/A,\chi)}.$$

□

2.4.2 Les groupes de Lie fortement $*$-réguliers

Définition 2.1. Soient G un groupe de Lie exponentiel résoluble et $\mathfrak{n}$ un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$ contenant $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. Pour $l \in \mathfrak{g}^*$, considérons

$$\mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}}) = \{X \in \mathfrak{g} \ : \ l([X,\mathfrak{n}]) = \{0\}\},$$

$$\mathfrak{m}(l) = \mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n} \subset \mathfrak{d}(l) = \mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}}) + \mathfrak{n}$$

et

$$\mathfrak{m}(l)^\infty = \bigcap_{k\geq 0} \mathcal{C}^k(\mathfrak{m}(l)), \quad \mathfrak{d}(l)^\infty = \bigcap_{k\geq 0} \mathcal{C}^k(\mathfrak{d}(l)),$$

où $\mathcal{C}^k(\mathfrak{d}(l)) = [\mathfrak{d}(l), \mathcal{C}^{k-1}(\mathfrak{d}(l))]$ est le k-ième terme de la série centrale descendante de $\mathfrak{d}(l)$, de même pour $\mathfrak{m}(l)^\infty$.

On dit qu'un élément $l \in \mathfrak{g}^*$ est **$\mathfrak{n}$-$*$-régulier** G si

$$< l, \mathfrak{m}(l)^\infty >= \{0\}.$$

On dit qu'un élément dans $\mathfrak{g}^*$ est fortement **$\mathfrak{n}$-$*$-régulier** si

$$< l, \mathfrak{d}(l)^\infty >= \{0\}.$$

Un groupe de Lie exponentiel $G = \exp \mathfrak{g}$ est **fortement $\mathfrak{n}$-$*$-régulier**, s'il existe un ouvert de Zariski dans $\mathfrak{g}^*$ tel que chaque élément de ce sous-ensemble est fortement $\mathfrak{n}$-$*$-régulier.

Cette définition, introduite pour des raisons techniques (voir le Sous-cas 2-1 dans la preuve de la Proposition 2.1), dépend du choix de $\mathfrak{n}$, le meilleur choix étant le nil-radical de $\mathfrak{g}$:

Définition 2.2. On dit que G est **fortement $*$-régulier**, si $\mathfrak{n}$ est le nil-radical de $\mathfrak{g}$.

Exemples 2.1.

1. Les groupes de Lie nilpotents sont fortement $*$-réguliers. Tous les groupes de Lie exponentiels connexes, simplement connexes G tels que dim $G \leq 4$ sont fortement $*$-réguliers, excepté le groupe $G_{4,9}(0)$, connu sous le nom de groupe de Boidol (voir [Bo]). Cet exemple sera étudié dans la Section 4.2.
2. Les j-algèbres normales sont fortement $*$-régulières.
   Rappelons tout d'abord la définition de cette classe spéciale d'algèbres et ses principales propriétés.
   Définition 2.3. Soient $(\mathfrak{g}, [.,.])$ une algèbre de Lie réelle complètement résoluble, $j : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ un automorphisme tel que : $j^2 = -Id_{|\mathfrak{g}}$ et ω une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$.
   Une **j-algèbre normale** est la donnée du triplet $(j, \mathfrak{g}, \omega)$ vérifiant les conditions suivantes :
   1. $$[Y_1, Y_2] + j[Y_1, jY_2] + j[jY_1, Y_2] - [jY_1, jY_2] = 0, \ \forall\ Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g},$$
   2. La forme bilinéaire suivante définit un produit scalaire j-invariant sur $\mathfrak{g}$:
   $$B_\omega(Y_1, Y_2) =< \omega, [Y_1, jY_2] >, \ \forall\ Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g},$$

Posons $G = \exp \mathfrak{g}$ le groupe de Lie associé.
En utilisant le produit scalaire B_ω, on obtient une première décomposition de $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \overset{\omega}{\bigoplus} \mathfrak{a},$$

où $\mathfrak{a}$ représente le complément orthogonal de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ par rapport à B_ω, en particulier c'est une sous-algèbre commutative. Notons $r = \dim \mathfrak{a}$.

La structure des j-algèbres est contenue dans le théorème suivant :
Théorème 2.3. *(Pyatetskii-Shapiro)[P-S]*

1. *Il existe une base $\{A_1, \ldots, A_r\}$ de $\mathfrak{a}$ telle que, si l'on pose $E_l := -jA_l$, alors $[A_k, E_l] = \delta_{kl} E_l$ $(1 \leq k, l \leq r)$.*
2. *Soit $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ la base duale de $\{A_1, \ldots, A_r\}$. Alors les seules racines possibles sont de la forme :*

$$\alpha_k, \qquad \alpha_k/2 \qquad (1 \leq k \leq r),$$

$$(\alpha_m - \alpha_k)/2, \qquad (\alpha_m + \alpha_k)/2 \qquad (1 \leq k < m \leq r),$$

$$\text{où } \mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g};\ [C, X] = \alpha(C)X,\ \forall\, C \in \mathfrak{a}\}.$$

3. *Les espaces radiciels $\mathfrak{g}_{\alpha_k}$ $(1 \leq k \leq r)$ sont de dimension un : $\mathfrak{g}_{\alpha_k} = \mathbb{R}E_k$.*
4. *Posons*

$$\mathfrak{g}(0) = \mathfrak{a} \bigoplus \Big(\bigoplus_{1 \leq k < m \leq r} \mathfrak{g}_{(\alpha_m - \alpha_k)/2} \Big),$$

$$\mathfrak{g}(1/2) = \bigoplus_{k=1}^{r} \mathfrak{g}_{(\alpha_k)/2},$$

$$\mathfrak{g}(1) = \Big(\bigoplus_{k=1}^{r} \mathbb{R}E_k \Big) \bigoplus \Big(\bigoplus_{1 \leq k < m \leq r} \mathfrak{g}_{(\alpha_m + \alpha_k)/2} \Big),$$

alors on a la décomposition de $\mathfrak{g}$ suivante :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(0) \oplus \mathfrak{g}(1/2) \oplus \mathfrak{g}(1).$$

Soit $l \in \mathfrak{g}^*$ en position générale, c'est-à-dire :

$$\exists\ \varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r) \in \{-1, 1\}^r \text{ tel que } < l, E_i >= \varepsilon_i,\ i = 1, \ldots, r.$$

Soit $\mathfrak{n}$ le nil-radical de $\mathfrak{g}$. Alors $\mathfrak{n} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.
Le groupe G est fortement $*$-régulier, en effet :

$$\mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}}) + \mathfrak{n} \subset \mathfrak{n}.$$

Démonstration. Sinon, $\exists\ A \in \mathfrak{a}$ tel que $A \in \mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}})$, i.e. :

$$< l, [A, U] >= 0, \ \forall\ U \in \mathfrak{n}.$$

Soient $U = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} c_k E_k,\ c_k \in \mathbb{R}$, et $A = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} a_i A_i,\ a_i \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} < l, [A, U] > &= < l, \Big[\sum_{i=1}^{r} a_i A_i, \sum_{k=1}^{r} c_k E_k\Big] > \\ &= \sum_{i=1}^{r} a_i c_i < l, [A_i, E_i] > \\ &= \sum_{i=1}^{r} a_i c_i < l, E_i > \\ &= \sum_{i=1}^{r} a_i c_i \varepsilon_i. \end{aligned}$$

Or on peut trouver des réels c_i tels que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} a_i c_i \varepsilon_i \neq 0$. Ce qui contredit l'hypothèse de départ.
Donc $\mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}}) + \mathfrak{n} \subset \mathfrak{n}$ et $\mathfrak{d}(l)^\infty = \{0\}$.
Ce qui implique la $*$-régularité forte de G. □

3. On peut trouver des groupes $G = \exp \mathfrak{g}$ dont les éléments génériques dans $\mathfrak{g}^*$ sont $*$-réguliers, mais qui ne sont pas fortement $*$-réguliers.

   Un exemple est donné par le groupe G dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est donnée par la base $\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6, Z_7\}$ et les crochets suivants :

$$[Z_1, Z_3] = -Z_3,\ [Z_1, Z_4] = Z_4,\ [Z_3, Z_4] = Z_7,$$

$$[Z_2, Z_5] = -Z_5,\ [Z_2, Z_6] = Z_6,\ [Z_5, Z_6] = Z_7,\ [Z_1, Z_2] = Z_7.$$

   Ainsi on a : $\mathfrak{n} =< Z_3,\ Z_4,\ Z_5,\ Z_6,\ Z_7 >$.

Si l'on prend $l \in \mathfrak{g}^\star$ en position générale, i.e., $l(Z_7) \neq 0$, alors on obtient : $\mathfrak{g}(l) =< Z_7 >$, d'où $(\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n})^\infty = \{0\}$, ce qui signifie que l est $*$-régulier.
Cependant $\mathfrak{d}(l) = \mathfrak{g}$ ainsi $\mathfrak{d}(l)^\infty = \mathfrak{n}$.
On en déduit que G n'est pas fortement $*$-régulier.

Remarques. 1. L'ensemble $\mathfrak{d}(l)^\infty$ est le plus petit idéal dans $\mathfrak{d}(l)$ tel que $\mathfrak{d}(l)/\mathfrak{d}(l)^\infty$ est nilpotent.

2. Soit $\mathfrak{n}$ le nil-radical d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{b}$ un idéal de codimension un dans $\mathfrak{g}$. L'intersection de $\mathfrak{n}$ avec $\mathfrak{b}$ est un idéal nilpotent de $\mathfrak{b}$ qui contient $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$.

2.4.3 Le cas unimodulaire

Supposons à présent que G unimodulaire.

Dans ce cas, on a $\xi \equiv 1$. Ainsi $K_\pi = \mathrm{Id}$ et notre formule se réduit à

$$\|\phi\|_2^2 = \int_{\widehat{G}_\chi} \mathrm{tr}(\pi_\Omega(\phi^* * \phi)) d\mu_\xi(\pi_\Omega).$$

Dans la suite, $\mathfrak{n}$ désignera un idéal nilpotent contenant $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et $N = \exp \mathfrak{n}$ son groupe de Lie connexe associé.

De plus, comme notre théorème principal sera localisé, nous avons besoin d'une version localisée de la condition de $\mathfrak{n}$-$*$-régularité forte.

Définition 2.4. Soient $A = \exp \mathfrak{a}$ un sous-groupe fermé connexe du centre $Z(G)$ de G contenu dans N et $\psi \in \mathfrak{a}^*$.

On dit que G est **fortement $\mathfrak{n}$-ψ-$*$-régulier** s'il existe un ouvert de Zariski dans $\mathfrak{g}^*_\psi$ tel que :

$$< l, \mathfrak{d}(l)^\infty >= \{0\}, \text{ pour chaque } l \text{ dans cet ouvert.}$$

Démontrons le résultat qui suit :

Proposition 2.1. *Soit G un groupe de Lie exponentiel résoluble unimodulaire fortement $\mathfrak{n}$-ψ-$*$-régulier. Alors, pour $1 < p \leq 2$,*

$$\Big(\int_{\mathfrak{g}^*_\psi / G} \|\pi_{\Omega_\psi}(\varphi)\|^q_{C_q} d\mu_\psi(\Omega_\psi) \Big)^{\frac{1}{q}} \leq A_p^{\frac{2\dim G/A - m_\psi}{2}} \|\varphi\|_{L^p(G/A, \chi_\psi)},$$

où $\varphi \in C_c(G/A)$ et $m_\psi = \sup \Big\{ \ \dim(G \cdot l) \ ; \ l \in \mathfrak{g}^*_\psi \Big\}.$

Démonstration. Prouvons ce résultat par récurrence sur dim(G)+dim$(G/A) =: \delta(G, A)$. Si $\delta(G, A) = 1$, alors $G = A = \mathbb{R}$ et on a le résultat d'après W. Beckner [Be], car on est dans la situation abélienne.

Si $\delta(G, A) > 1$, soient $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ le centre de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{z} = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{a}_0$ le noyau de ψ et $A_0 = \exp \mathfrak{a}_0$. D'après [L-L] page 34, nous devons traiter les cas suivants :

Cas 1. $\dim \mathfrak{z} = 0$.

Sous-cas 1.1. : il existe un vecteur non nul $Y \in \mathfrak{n}$ et une forme linéaire réelle non nulle α sur $\mathfrak{g}$ tels que :

$$[X, Y] = \alpha(X)Y, \ \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Sous-cas 1.2. : il existe deux vecteurs non nuls $Y_1, \ Y_2 \in \mathfrak{n}, \ \theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et une forme linéaire réelle non nulle α sur $\mathfrak{g}$ tels que :

$$[X, Y_1] = \alpha(X)(Y_1 - \theta Y_2),$$

$$[X, Y_2] = \alpha(X)(\theta Y_1 + Y_2), \ \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Cas 2. $\dim \mathfrak{z} > 0$.

Sous-cas 2.1. : $\dim \mathfrak{a}_0 \geq 1$.

Sous-cas 2.2. : $\dim \mathfrak{a}_0 = 0$ et $\dim \mathfrak{z} \geq 2$.

Sans perte de généralité, on peut supposer que : $\psi_{|\mathfrak{z}} \neq 0$.

Sous-cas 2.3. : $\dim \mathfrak{a}_0 = 0$ et $\dim \mathfrak{z} = 1$, i.e., $\mathfrak{z} = \mathbb{R}Z$.

On peut supposons que : $\psi(Z) = 1$.

Sous-cas 2.3.1. : il existe un vecteur non nul $Y \in \mathfrak{n}$ et deux formes linéaires réelles α, β, sur $\mathfrak{g}$ tels que :

$$[X, Y] = \alpha(X)Y + \beta(X)Z, \ \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Sous-cas 2.3.2. : il existe deux vecteurs non nuls $Y_1, \ Y_2 \in \mathfrak{g}, \ \theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et trois formes linéaires réelles linéairement indépendantes non nulles α, β_1, β_2, sur $\mathfrak{g}$ tels que :

$$[X, Y_1] = \alpha(X)(Y_1 - \theta Y_2) + \beta_1(X)Z,$$

$$[X, Y_2] = \alpha(X)(\theta Y_1 + Y_2) + \beta_2(X)Z, \ \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Cas 3. $\mathfrak{n} = \{0\}$ ou $\mathfrak{n} = \mathfrak{z}$.

Entamons à présent notre démonstration.

Cas 1. $\dim \mathfrak{z} = 0$.

Sous-cas 1.1. Il existe un vecteur non nul $Y \in \mathfrak{g}$ tel que :

$$[X, Y] = \alpha(X)Y,$$

où α est une forme linéaire réelle non nulle sur $\mathfrak{g}$.

Soit

$$\mathfrak{g}_0 = \ker\alpha = \ \{X \in \mathfrak{g} \ : \ [X, Y] = 0\}.$$

Ainsi $\mathfrak{g}_0$ est un idéal de codimension un dans $\mathfrak{g}$, qui est fortement $\mathfrak{n}$-ψ-$*$-régulier.

En effet, $\mathfrak{n}$ est contenu dans $\mathfrak{g}_0$, car pour chaque élément U de $\mathfrak{g}$, le nombre $\alpha(U)$ est dans le spectre de $\mathrm{ad}(U)$. Soient $l_0 \in (\mathfrak{g}_0^*)_\psi$ et l une extension de l_0 à $\mathfrak{g}^*$.

Donc on obtient :

$$< l_0, (\mathfrak{g}_0(l_{|\mathfrak{n}}) + \mathfrak{n})^\infty >=< l, (\mathfrak{g}_0(l_{|\mathfrak{n}}) + \mathfrak{n})^\infty > \subset < l, \mathfrak{d}(l)^\infty > .$$

Il s'ensuit que $< l_0, (\mathfrak{g}_0(l_{|\mathfrak{n}}) + \mathfrak{n})^\infty >= \{0\}$ pour presque toute forme $l_0 \in \mathfrak{g}_0^*$ comme $< l, (\mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}}) + \mathfrak{n})^\infty >= \{0\}$.

D'autre part, si $l(Y) \neq 0$ alors $\mathrm{Ad}^*(\exp \mathbb{R}Y)(l) = l + \mathfrak{g}_0^\perp$. Ceci implique que presque chaque G-orbite est saturée par rapport à $\mathfrak{g}_0$.

Ainsi, d'après le Lemme 2.1, on a le résultat escompté.

Sous-cas 1.2. Il existe deux vecteurs non nuls $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}$, $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et une forme linéaire réelle non nulle α sur $\mathfrak{g}$ tels que :

$$[X, Y_1] = \alpha(X)(Y_1 - \theta Y_2),$$

$$[X, Y_2] = \alpha(X)(\theta Y_1 + Y_2), \ \forall X \in \mathfrak{g}.$$

On a donc $[X, Y_1 + iY_2] = \alpha(X)(1 + i\theta)(Y_1 + iY_2) = \alpha'(X)(Y_1 + iY_2)$ où $\alpha' = (1 + i\theta)\alpha$ est une forme linéaire complexe non nulle.

Posons $\mathfrak{g}_0 = \ker\alpha = \ker\alpha'$ et $G_0 = \exp \mathfrak{g}_0$.

Ainsi $\mathfrak{g}_0$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ de codimension un et donc G_0 un sous-groupe normal unimodulaire de G. De plus, $\mathfrak{g}_0$ vérifie la condition de $\mathfrak{n}$-ψ-$*$-régularité forte car, comme dans le Sous-cas 1.1, $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}_0$.

Pour terminer ce cas, nous devons prouver la saturation des orbites par rapport $\mathfrak{g}_0$. Soit $\mathfrak{m} = \mathbb{R}Y_1 \oplus \mathbb{R}Y_2$. Si $l_{|\mathfrak{m}} \neq 0$, alors

$$\mathrm{Ad}^*(\exp(\mathfrak{m}))l = l + \mathfrak{g}_0^{\perp}.$$

En effet, soit $X \in \mathfrak{g}$ tel que : $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathbb{R}X$ et $uY_1 + vY_2 \in \mathfrak{m}$.

On a donc

$$[X, uY_1 + vY_2] = u[X, Y_1] + v[X, Y_2] = \alpha(X)((u + v\theta)Y_1 + (v - u\theta)Y_2).$$

On peut choisir $u, v \in \mathbb{R}$ tels que : $[X, uY_1 + vY_2] \neq 0$. D'où

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}^*(\exp(uY_1 + vY_2))(l)(X) &= l(\mathrm{e}^{\mathrm{ad}(-uY_1 - vY_2)}X) \\
&= l(X + [-uY_1 - vY_2, X]) \\
&= l(X) + \alpha(X)l((u + v\theta)Y_1 + (v - u\theta)Y_2).
\end{aligned}$$

Comme $l_{|\mathfrak{m}} \neq 0$, on en déduit que $\mathrm{Ad}^*(\exp(\mathbb{R}Y_1 + \mathbb{R}Y_2))l = l + \mathfrak{g}_0^{\perp}$.

Finalement, on peut conclure ce cas en utilisant le Lemme 2.1.

Cas 2. Supposons que $\dim \mathfrak{z} \geq 1$.

Posons, comme précédemment, $\mathfrak{a}_0$ le noyau de ψ et $A_0 = \exp \mathfrak{a}_0$. Les deux sous-cas suivants se traitent de la manière que dans [B-S-L] en faisant quelques petits changements :

Sous-cas 2.1. Supposons que $\dim \mathfrak{a}_0 \geq 1$.

Posons $A' = A/A_0$, $G' = G/G_0$ et $\mathfrak{g}'$ =Lie(G'), alors A' est un sous-groupe central de G'.

De plus, $\mathfrak{n}/\mathfrak{a}_0$ est idéal nilpotent de $\mathfrak{g}'$ qui contient $[\mathfrak{g}/\mathfrak{a}_0, \mathfrak{g}/\mathfrak{a}_0]$.

Il est facile de voir que G' est aussi fortement $\mathfrak{n}/\mathfrak{a}_0$-$\psi$-$*$-régulier. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à (G', A') on obtient :

$$\Big(\int_{\mathfrak{g}'^*_{\bar{\psi}}/G'} \|\pi_{\Omega'_{\bar{\psi}}}(\bar{\varphi})\|^q_{C_q} d\mu_{\bar{\psi}}(\Omega'_{\bar{\psi}})\Big)^{\frac{1}{q}} \leq A_p^{\frac{2\dim(G'/A') - m_{\bar{\psi}}}{2}} \|\bar{\varphi}\|_{L^p(G'/A', \chi_{\bar{\psi}})},\ \bar{\varphi} \in C_c(G'/A'),$$

où $\bar{\psi} \circ p_{|\mathfrak{a}} = \psi$ et

$$m_{\bar{\psi}} = \sup\Big\{ \dim((G/A_0)\cdot\phi) \ ; \ \phi \in \bar{\psi} + (\mathfrak{a}/\mathfrak{a}_0)^{\perp,\mathfrak{g}/\mathfrak{a}_0} \Big\} = m_\psi, \text{ comme } \psi_{|\mathfrak{a}_0} = 0.$$

De plus, on a

$$L^q(\widehat{G}_{\chi_\psi}) = L^q(\widehat{(G/A_0)}_{\chi_{\bar{\psi}}}), \ L^p(G/A,\chi_\psi) = L^p((G/A_0)/(A/A_0),\chi_{\bar{\psi}}) \text{ (voir 2.7).}$$

On en déduit que

$$\Big(\int_{\mathfrak{g}^*_\psi/G} \|\pi_{\Omega_\psi}(\varphi)\|^q_{C_q} d\mu_\psi(\Omega_\psi)\Big)^{\frac{1}{q}} \le A_p^{\frac{2\dim(G/A)-m_\psi}{2}} \|\varphi\|_{L^p(G/A,\chi_\psi)}.$$

Remarque. En général, si l'on prend $\mathfrak{n}$ comme étant le nil-radical de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{n}/\mathfrak{a}_0$ n'est pas le nil-radical de $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}_0$. C'est pourquoi nous avons dû introduire la $\mathfrak{n}$-$*$-régularité avec $\mathfrak{n}$ un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$ contenant $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$.

Sous-cas 2.2. Supposons que $\dim \mathfrak{a}_0 = 0$ et $\dim \mathfrak{z} \ge 2$. Soient

$$\mathfrak{z}^*_\psi = \{\alpha \in \mathfrak{z}^* |\ \alpha_{|\mathfrak{a}} = \psi\}.$$

L'hypothèse de récurrence appliquée à (G,Z) nous donne

$$\Big(\int_{\mathfrak{g}^*_\alpha/G} \|\pi_{\Omega_\alpha}(\varphi)\|^q_{C_q} d\mu_\alpha(\Omega_\alpha)\Big)^{\frac{1}{q}} \le A_p^{\frac{2\dim(G/Z)-m_\alpha}{2}} \|\varphi\|_{L^p(G/Z,\chi_\alpha)},$$

pour tout $\varphi \in C_c(G/Z)$ et $\alpha \in \mathfrak{z}^*_\psi$.

On a $m_\alpha = \sup\Big\{ \dim(\mathrm{Ad}^*(G)l) \ ; \ l \in \alpha + \mathfrak{z}^\perp \Big\}$. Il est facile de montrer qu'il existe un ouvert de Zariski dans $\mathfrak{z}^*_\psi$, tel que $m_\alpha = m_\psi$ pour chaque α dans cet ensemble.

Définissons à présent la transformée de Fourier euclidienne partielle $\widehat{\varphi}$, associée à $\alpha \in \mathfrak{z}^*_\alpha$, sur Z/A par :

$$\widehat{\varphi}(\alpha)(g) = \int_{\mathfrak{z}/\mathfrak{a}} e^{-2i\pi(\alpha)(X)} \varphi(g\exp X)dX, \ \forall g \in G/A.$$

Pour π associée à une orbite dans $\mathfrak{g}_\alpha^*/G$, on a :

$$\pi(\varphi) = \int_{G/A} \varphi(g)\pi(g)dg = \int_{G/Z}\int_{Z/A} \varphi(gz)\pi(g)\chi_\alpha(z)dzdg$$

$$= \int_{G/Z} \pi(g)\widehat{\varphi}(\alpha)(g)dg = \pi(\widehat{\varphi}(\alpha)).$$

Ainsi on obtient

$$\int_{\mathfrak{g}_\psi^*/G} \|\pi_{\Omega_\psi}(\varphi)\|_{C_q}^q d\mu_\psi(\Omega_\psi) = \int_{\mathfrak{z}_\psi^*}\int_{\mathfrak{g}_\alpha^*/G} \|\pi_{\Omega_\alpha}(\widehat{\varphi}(\alpha))\|_{C_q}^q d\mu_\alpha(\Omega_\alpha)d\alpha$$

(par hypothèse de récurrence)

$$\leq A_p^{q\frac{2\dim(G/Z)-m_\psi}{2}} \int_{\mathfrak{z}_\psi^*} \|\widehat{\varphi}(\alpha)\|_{L^p(G/Z,\chi_\alpha)}^q d\alpha$$

$$= A_p^{q\frac{2\dim(G/Z)-m_\psi}{2}} \int_{\mathfrak{z}_\psi^*} \Big(\int_{G/Z} |\widehat{\varphi}(\alpha)(g)|^p dg\Big)^{\frac{q}{p}} d\alpha$$

(par l'inégalité de Minkowski généralisée)

$$\leq A_p^{q\frac{2\dim(G/Z)-m_\psi}{2}} \Big(\int_{G/Z} \Big(\int_{\mathfrak{z}_\psi^*} |\widehat{\varphi}(\alpha)(g)|^q d\alpha\Big)^{\frac{p}{q}} dg\Big)^{\frac{q}{p}}$$

(par le résultat de Beckner pour $\mathbb{R}^k$ avec $k = \dim(Z/A)$)

$$\leq A_p^{q\frac{2\dim(G/Z)-m_\psi}{2}} A_p^{q\dim(Z/A)} \Big(\int_{G/Z} \|\varphi(g,.)\|_{L^p(Z/A,\chi_\psi)}^p dg\Big)^{\frac{q}{p}}$$

$$= A_p^{q\frac{2\dim(G/A)-m_\psi}{2}} \|\varphi\|_{L^p(G/A,\chi_\psi)}^q.$$

Sous-cas 2.3. Supposons que $\dim \mathfrak{a}_0 = 0$ et $\dim \mathfrak{z} = 1$. Soit $\mathfrak{z} = \mathbb{R}Z$. On peut de plus supposer que $\psi(Z) = 1$.

Sous-cas 2.3.1. Il existe un vecteur non nul $Y \in \mathfrak{g}$ et deux formes linéaires réelles α, β, sur $\mathfrak{g}$ tels que :

$$\text{pour tout } X \in \mathfrak{g},\ [X,Y] = \alpha(X)Y + \beta(X)Z,$$

où α et β sont deux formes linéaires sur $\mathfrak{g}$.

Nous devons traiter les sous-cas suivants :

A. α et β sont linéairement indépendantes.

Soit

$$\mathfrak{g}_\alpha = \ker\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \ : \ [X,Y] = \beta(X)Z\}.$$

Le sous-espace $\mathfrak{g}_\alpha$ est un idéal de codimension un de $\mathfrak{g}$ et le sous-groupe correspondant $G_\alpha = \exp \mathfrak{g}_\alpha$ est un sous-groupe normal unimodulaire de G.

Il vérifie aussi la condition de $\mathfrak{n}$-ψ-$*$-régularité forte.

En effet, il est clair que $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}_\alpha$.

Ainsi comme $\mathfrak{g}_\alpha(l_{|\mathfrak{n}}) \subset \mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}})$, on obtient que $(\mathfrak{g}_\alpha(l_{|\mathfrak{n}}) + \mathfrak{n})^\infty \subset \mathfrak{d}(l)^\infty$.

D'où

$$< l_{|\mathfrak{g}_\alpha}, (\mathfrak{g}_\alpha(l_{|\mathfrak{n}}) + \mathfrak{n})^\infty >= \{0\}.$$

D'autre part, les G-orbites génériques sont saturées par rapport à $\mathfrak{g}_\alpha$, i.e., $\mathfrak{g}(l) \subset \mathfrak{g}_\alpha$.

En effet, soit $T \in \mathfrak{g}(l)$. Posons

$$\mathfrak{g}_\beta = \ker\beta = \{X \in \mathfrak{g} \ : \ [X,Y] = \alpha(X)Y\}.$$

Comme α and β sont linéairement indépendantes, on a la décomposition de $\mathfrak{g}$ suivante :

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{g}_\beta) \oplus \mathbb{R}X_1 \oplus \mathbb{R}X_2 \ \text{ avec } \ X_1 \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \mathfrak{g}_\beta \text{ et } X_2 \in \mathfrak{g}_\beta \setminus \mathfrak{g}_\alpha.$$

Comme $[X_1, Y] = \beta(X_1)Z$ et $[X_2, Y] = \alpha(X_2)Y$, on peut supposer que $\alpha(X_2) = \beta(X_1) = 1$.

Si $T \in \mathfrak{g}$, il existe $\gamma,\ \delta \in \mathbb{R}$ et $U_0 \in \mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{g}_\beta$ tels que $T = \gamma X_1 + \delta X_2 + U_0$. On en déduit que $[T,Y] = \gamma Z + \delta Y$ et nous devons montrer que $\delta = 0$.

Supposons par l'absurde que $\beta \neq 0$. Montrons que $Z \in \mathfrak{d}(l)^\infty$.

Remarquons tout d'abord que $Z \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{n} + \mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}}) = \mathcal{C}^0(\mathfrak{d}(l))$.

Comme $T \in \mathfrak{g}(l) \subset \mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}})$, on a : $[T, Y] \in \mathcal{C}^1(\mathfrak{d}(l))$. Ceci implique que $[X_1, [T, Y]] = \delta Z \in \mathcal{C}^1(\mathfrak{d}(l))$ et ainsi $Z \in \mathcal{C}^1(\mathfrak{d}(l))$.

Etant donné que $[T, Y] = \gamma Z + \delta Y \in \mathcal{C}^1(\mathfrak{d}(l))$ et $Z \in \mathcal{C}^1(\mathfrak{d}(l))$, on obtient que $Y \in \mathcal{C}^1(\mathfrak{d}(l))$.

Soit k un entier positif. Comme $\mathrm{ad}^k(T)(Y) \in \mathcal{C}^k(\mathfrak{d}(l))$, on en déduit que

$$[X_1, \mathrm{ad}^k(T)(Y)] = \delta^{k+1} Z \in \mathcal{C}^k(\mathfrak{d}(l)).$$

D'où $Z \in \mathcal{C}^k(\mathfrak{d}(l))$ pour tout $k \geqslant 0$, et donc $Z \in \mathfrak{d}(l)^\infty$.

La $\mathfrak{n}$-$*$-régularité forte implique que $l(Z) = 0$, ce qui contredit le fait que l est générique.

Donc $\delta = 0$, T est un élément de $\mathfrak{g}_\beta$ et $G \cdot l$ est saturée par rapport à $\mathfrak{g}_\alpha$.

Le Lemme 2.1 permet d'achever la preuve de ce cas.

B. Supposons que $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$.

Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, on peut écrire que

$$[X, Y] = \beta(X) Z.$$

Le sous-espace $\mathfrak{g}_\beta = \{X \in \mathfrak{g} \ : \ [X, Y] = 0\} = C(Y)$ est un idéal de codimension un dans $\mathfrak{g}$, où $C(Y)$ est le centralisateur de Y dans $\mathfrak{g}$ et $G_\beta = \exp \mathfrak{g}_\beta$ est un sous-groupe normal unimodulaire de G.

Soient $\mathfrak{n}_\beta = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}_\beta$. D'après la Remarque(b) dans la section 2.4.2, $\mathfrak{n}_\beta$ est un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}_\beta$ contenant $[\mathfrak{g}_\beta, \mathfrak{g}_\beta]$.

B1. Supposons que $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}_\beta$, ce qui signifie que $\mathfrak{n}_\beta = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}_\beta = \mathfrak{n}$.

Prenons $\widetilde{l} \in \mathfrak{g}_\beta^*$ et l une extension de $\widetilde{l}$ à $\mathfrak{g}^*$, alors

$$\mathfrak{g}_\beta(\widetilde{l}_{|\mathfrak{n}_\beta}) + \mathfrak{n}_\beta \subset \mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}}) + \mathfrak{n},$$

d'où

$$\big(\mathfrak{g}_\beta(\widetilde{l}_{|\mathfrak{n}_\beta}) + \mathfrak{n}_\beta\big)^\infty \subset \mathfrak{d}(l)^\infty.$$

Ceci prouve que $\mathfrak{g}_\beta$ possède la $\mathfrak{n}_\beta$-ψ-$*$-régularité forte et on vérifie facilement que les orbites génériques sont saturées par rapport à $\mathfrak{g}_\beta$, car $\mathrm{Ad}^*(\exp \mathbb{R} Y)(l) = l + \mathfrak{g}_\beta^\perp$.

On peut appliquer de nouveau le Lemme 2.1.

B2. Supposons que $\mathfrak{n} \not\subset \mathfrak{g}_\beta$. On a $\mathfrak{n}_\beta = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}_\beta$. Soient $\widetilde{l} \in \mathfrak{g}_\beta^*$ et l une extension de $\widetilde{l}$ à $\mathfrak{g}^*$. On en déduit que

$$\mathfrak{g}_\beta(\widetilde{l}_{|\mathfrak{n}_\beta}) \subset \mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}}) + \mathbb{R}Y.$$

En effet, comme $\beta \neq 0$, il existe un élément X de $\mathfrak{n}$ tel que $[Y, X] = Z$. Soit U un élément de $\mathfrak{g}_\beta(l_{|\mathfrak{n}_\beta})$. Si $l([U, X]) = 0,$ alors $U \in \mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}})$, sinon prenons $l([U, X]) = \delta \neq 0$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$l([U + \lambda Y, X]) = l([U, X]) + \lambda l([Y, X]) = \delta + \lambda l(Z).$$

Ainsi on peut choisir λ tel que $l([U + \lambda Y, X]) = 0$. Comme Y est un élément $\mathfrak{g}_\beta$, on en déduit que $U + \lambda Y \in \mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}}) + \mathbb{R}Y$, d'où

$$U \in \mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}}) + \mathbb{R}Y.$$

Ceci implique que, pour $U, U' \in \mathfrak{g}_\beta(\widetilde{l}_{|\mathfrak{n}_\beta})$ et $N, N' \in \mathfrak{n}_\beta$, on peut choisir λ et λ' dans $\mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{aligned} [U + N, U' + N'] &= [U + \lambda Y + N, U' + \lambda' Y + N'] \\ &\in [\mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}}) + \mathfrak{n}, \mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}}) + \mathfrak{n}] = C^1(\mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}}) + \mathfrak{n}). \end{aligned}$$

On conclut immédiatement que

$$\big(\mathfrak{g}_\beta(l_{|\mathfrak{n}_\beta}) + \mathfrak{n}_\beta\big)^\infty \subset \mathfrak{d}(l)^\infty.$$

Ainsi la $\mathfrak{n}_\beta$-ψ-$*$-régularité forte de $\mathfrak{g}_\beta$ est vérifiée. Comme la saturation des orbites génériques est claire, le Lemme 2.1 nous donne le résultat.

C. α, β sont linéairement dépendantes et $\alpha \neq 0$.

Il existe $\delta \in \mathbb{R}$ tel que $\beta = \delta\alpha$.

Alors, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, $[X, Y] = \alpha(X)(Y + \delta Z)$,

d'où $[X, Y + \delta Z] = \alpha(X)(Y + \delta Z)$.

Soit

$$\mathfrak{g}_0 = \{A \in \mathfrak{g} : [A, Y + \delta Z] = 0\} = \ker\alpha.$$

Et on est dans la même situation que dans le Sous-cas 1.1.

Sous-cas 2.3.2. Il existe deux vecteurs non nuls $Y_1,\ Y_2 \in \mathfrak{g},\ \theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et trois formes linéaires réelles non nulles linéairement indépendantes α, β_1, β_2, sur $\mathfrak{g}$ tels que :

$$[X, Y_1] = \alpha(X)(Y_1 - \theta Y_2) + \beta_1(X)Z,$$

$$[X, Y_2] = \alpha(X)(\theta Y_1 + Y_2) + \beta_2(X)Z, \ \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Soient $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ et $\alpha' = \alpha(1 + i\theta)$. Alors on a que

$$[X, Y_1 + iY_2] = \alpha'(X)(Y_1 + iY_2) + \beta(X)Z.$$

D'autre part, on peut facilement construire $X_1, X_2, S \in \mathfrak{g}$ tels que :

$$\alpha(S) = 1, \quad \text{i.e.,} \quad [S, Y_1] = Y_1 - \theta Y_2,$$

$$\beta(S) = 0, \quad \text{i.e.,} \quad [S, Y_2] = \theta Y_1 + Y_2,$$

d'où $[S, Y_1 + iY_2] = Y_1 + iY_2$ et

$$\alpha(X_1) = \alpha(X_2) = 0, \ \beta(X_1) = \beta(X_2) = 1,$$

$$[X_j, Y_k] = \delta_{jk} Z, \quad 1 \leq j, k \leq 2.$$

Soient

$$\mathfrak{g}_\alpha = \ker\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \ : \ [X, Y_1 + iY_2] = \beta(X)Z\}$$

et $G_\alpha = \exp \mathfrak{g}_\alpha$.

Le sous-espace $\mathfrak{g}_\alpha$ est un idéal de codimension un dans $\mathfrak{g}$ et G_α est un sous-groupe normal unimodulaire de G. Comme $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}_\alpha$, la $\mathfrak{n}$-ψ-$*$-régularité forte est satisfaite. De plus, les orbites génériques sont saturées par rapport à $\mathfrak{g}_\alpha$. En effet, soit $T \in \mathfrak{g}(l)$, on doit montrer que $T \in \mathfrak{g}_\alpha$. Etant donné que $l(Z) \neq 0$, on peut supposer que $l(Y_1) = l(Y_2) = 0$.

Soit $\mathfrak{g}_\beta = \ \text{Ker } \beta = \{X \in \mathfrak{g} \ : \ [X, Y_1 + iY_2] = \alpha'(X)(Y_1 + iY_2)\}$.

On en déduit que

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{g}_\beta) \oplus \mathbb{R}X_1 \oplus \mathbb{R}X_2 \oplus \mathbb{R}S.$$

Ainsi il existe $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{R}$ et $U_0 \in \mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{g}_\beta$ tels que $T = \gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + \gamma_3 S + U_0$. Comme $T \in \mathfrak{g}(l)$, on a que

$$l([T, Y_1]) = l([\gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + \gamma_3 S + U_0, Y_1]) = \gamma_1 l(Z) + \gamma_3 l(Y_1 - \theta Y_2) = 0$$

et

$$l([T, Y_2]) = l([\gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + \gamma_3 S + U_0, Y_2]) = \gamma_2 l(Z) + \gamma_3 l(\theta Y_1 + Y_2) = 0.$$

Rappelons que $l(Y_1) = l(Y_2) = 0$ et $l(Z) \neq 0$, donc $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. D'où, $T = U_0 + \gamma_3 S$.

Montrons que $\gamma_3 = 0$. Sinon, prouvons que $Z \in (\mathfrak{d}((l))^\infty$ ce qui est absurde.

Tout d'abord nous avons que $Y_1, Y_2 \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathcal{C}^0(\mathfrak{d}((l))$, car $[S, Y_1] = Y_1 - \theta Y_2$ et $[S, Y_2] = \theta Y_1 + Y_2$. A présent, supposons que $Y_1, Y_2 \in \mathcal{C}^k(\mathfrak{d}((l))$.

Alors,

$$[T, Y_1] = [U_0 + \gamma_3 S, Y_1] = \gamma_3(Y_1 - \theta Y_2) \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathfrak{d}((l))$$

et

$$[T, Y_2] = [U_0 + \gamma_3 S, Y_2] = \gamma_3(\theta Y_1 + Y_2) \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathfrak{d}((l)),$$

Ce qui implique que $Y_1, Y_2 \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathfrak{d}(l))$.

On obtient par récurrence :

$$Y_1, Y_2 \in \mathcal{C}^k(\mathfrak{d}(l)), \quad \text{pour tout} \quad k \geq 0.$$

Donc on en déduit que :

$$[X_1, Y_1] = Z \in \mathcal{C}^k(\mathfrak{d}(l)), \quad \text{pour tout} \quad k \geq 0$$

et que $Z \in \mathfrak{d}(l)^\infty$. Finalement, grâce au Lemme 2.1, on a le résultat.

Cas 3.

Sous-cas 3.1. $\mathfrak{n} = \{0\}$.

Dans ce cas, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \{0\}$ et $\mathfrak{g}$ est commutative. Et on utilise le résultat classique.

Sous-cas 3.2. $\mathfrak{n} = \mathfrak{z}$.

On a $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \{0\} = \mathfrak{z}$, donc $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie nilpotente de pas 2 et on obtient le résultat d'après [B-S-L].

□

En prenant $\mathfrak{n}$ le nil-radical de $\mathfrak{g}$ et $A = \{e\}$ dans la Proposition 2.1, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 2.1. *Soit G un groupe de Lie exponentiel résoluble fortement $*$-régulier unimodulaire. Alors, pour $1 < p \leq 2$,*

$$\Big(\int_{\widehat{G}} \|\pi(\varphi)\|_{C_q}^q d\mu(\pi)\Big)^{\frac{1}{q}} \leq A_p^{\frac{2dimG-m}{2}} \|\varphi\|_p,$$

où $\varphi \in C_c(G)$ et m la dimension maximale des orbites coadjointes.

2.4.4 Théorème principal

Théorème 2.4. *Soit G un groupe de Lie exponentiel résoluble vérifiant la condition de $*$-régularité forte. Soit m la dimension maximale des orbites coadjointes.*
Soient $1 < p \leq 2$ et $q = \dfrac{p}{p-1}$. Alors, pour tout $\varphi \in L^1(G) \cap L^p(G)$ et pour μ-presque tout $\pi \in \widehat{G}$, l'opérateur $\pi^p(\varphi) := \pi(\varphi)K_\pi^{\frac{-1}{q}}$ est borné, son extension est de classe C_q et satisfait l'inégalité suivante :

$$\Big(\int_{\widehat{G}} \|\pi^p(\varphi)\|_{C_q}^q d\mu(\pi)\Big)^{\frac{1}{q}} \leq A_p^{\frac{2dimG-m}{2}} \|\varphi\|_p.$$

Démonstration. Soit G un groupe de Lie exponentiel résoluble non unimodulaire vérifiant la condition de $*$-régularité forte d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Soit G_0 le noyau de la fonction module de G. Alors G_0 est un sous-groupe fermé unimodulaire de G.

Comme génériquement, $\mathfrak{g}(l)$ est nilpotente, on peut supposer que pour tout $\pi \in V$ on peut écrire $\pi = \mathrm{ind}_{G_0}^G \pi_0$ pour une certaine représentation $\pi_0 \in U$ (voir la section 2.2.2 pour les notations).

Tout d'abord démontrons un lemme qui sera utile dans la suite de notre preuve.

Lemme 2.2. *Soient $\pi \in V$ et $\pi = \mathrm{Ind}_{G_0}^G \pi_0$. Pour $\varphi \in L^1(G) \cap L^p(G)$, $\pi(\varphi)K_\pi^{\frac{-1}{q}}$ est un opérateur intégral sur $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_{\pi_0})$ dont le noyau à valeurs opérationnelles $k_{\pi(\varphi)}$ est défini par :*

$$\pi(\varphi)K_\pi^{\frac{-1}{q}}\eta(s) = \int_{\mathbb{R}} k_{\pi(\varphi)}(s,t)\eta(t)dt,$$

où $k_{\pi(\varphi)}(s,t) = \pi_0^t(\varphi^{s-t})\Delta^{\frac{1}{q}}(\exp tX)$ et $\varphi^{s-t}(g_0) = \varphi(\exp(s-t)Xg_0)$.

Démonstration. Nous utilisons les notations de la Section 2.2.

Pour $g = \exp(tX)g_0$ et $\eta \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_{\pi_0})$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\pi(\exp(tX)g_0)K_\pi^{\frac{-1}{q}}\eta(s) &= K_\pi^{\frac{-1}{q}}\eta(g_0^{-1}\exp(s-t)X) \\
&= \Delta_G^{\frac{1}{q}}(\exp(s-t)X)\eta(g_0^{-1}\exp(s-t)X) \\
&= \Delta_G^{\frac{1}{q}}(\exp(s-t)X)\eta(\exp(s-t)X\exp(t-s)Xg_0^{-1}\exp(s-t)X)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Delta_G^{\frac{1}{q}}(\exp(s-t)X)\pi_0(\exp((t-s)X)g_0\exp((s-t)X))\eta(s-t) \\
&= \Delta_G^{\frac{1}{q}}(\exp(s-t)X)\pi_0^{s-t}(g_0)\eta(s-t).
\end{aligned}$$

D'autre part, nous avons que

$$\pi(\varphi)K_\pi^{\frac{-1}{q}}\eta(s) = \int_G \varphi(g)\pi(g)K_\pi^{\frac{-1}{q}}\eta(s)dg$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{G_0}\varphi(\exp(tX)g_0)\pi(\exp(tX)g_0)K_\pi^{\frac{-1}{q}}\eta(s)dg_0dt$$

(en utilisant les calculs précédents)

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{G_0}\varphi(\exp(tX)g_0)\pi_0^{s-t}(g_0)\eta(s-t)\Delta_G^{\frac{1}{q}}(\exp(s-t)X)dg_0dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{G_0}\varphi(\exp(s-t)Xg_0)\pi_0^{t}(g_0)\eta(t)\Delta_G^{\frac{1}{q}}(\exp tX)dg_0dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\pi_0^t(\varphi^{s-t})\Delta_G^{\frac{1}{q}}(\exp tX)\eta(t)dt.$$

□

Nous devons utiliser l'inégalité (3.14) pour estimer la norme $\|\pi(\varphi)K_\pi^{\frac{-1}{q}}\|_{C_q}$.
Calculons la norme $\|k_{\pi(\varphi)}\|_{p,q}$:

$$\begin{aligned}
\|k_{\pi(\varphi)}\|_{p,q} &= \Big(\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}\|k_{\pi(\varphi)}(s,t)\|_{C_q}^p ds\Big)^{\frac{q}{p}}dt\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&= \Big(\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}\|\pi_0^t(\varphi^{s-t})\Delta_G^{\frac{1}{q}}(\exp tX)\|_{C_q}^p ds\Big)^{\frac{q}{p}}dt\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&= \Big(\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}\|\pi_0^t(\varphi^{s})\|_{C_q}^p ds\Big)^{\frac{q}{p}}\Delta_G(\exp tX)dt\Big)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\int_{\widehat{G}}\|k_{\pi(\varphi)}\|_{p,q}^q\, d\mu(\pi) = \int_{\widehat{G}}\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}\|\pi_0^t(\varphi^s)\|_{C_q}^p ds\Big)^{\frac{q}{p}}\Delta_G(\exp tX)dtd\mu(\pi)$$

(en appliquant l'inégalité de Minkowski généralisée aux mesures $\Delta_G(\exp tX)dtd\mu$ et ds)

$$\leq \Big(\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\widehat{G}}\int_{\mathbb{R}}\|\pi_0^t(\varphi^s)\|_{C_q}^q\Delta_G(\exp tX)dtd\mu(\pi)\Big)^{\frac{p}{q}}ds\Big)^{\frac{q}{p}}$$

$$\leq \Big(\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\widehat{G}}\int_{\mathbb{R}}\|\pi_0^t(\varphi^s)\|_{C_q}^q\xi_0(\exp tX\cdot\pi_0)dtd\mu(\pi)\Big)^{\frac{p}{q}}ds\Big)^{\frac{q}{p}}$$

$$= \Big(\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\widehat{G}_0}\|\pi_0(\varphi^s)\|_{C_q}^q d\mu_0(\pi_0)\Big)^{\frac{p}{q}}ds\Big)^{\frac{q}{p}}$$

(par le formule (2.12) de désintégration de la mesure)

$$\leq \Big(\int_{\mathbb{R}} A_p^{p\frac{2\dim G_0-(m-2)}{2}}\|\varphi^s\|_p^p ds\Big)^{\frac{q}{p}}$$

(en utilisant la Proposition 2.1 pour G_0).

Donc

$$\int_{\widehat{G}}\|k_{\pi(\varphi)}\|_{p,q}^q\ d\mu(\pi)\leq A_p^{q\frac{2\dim G-m}{2}}\|\varphi\|_p^q.$$

Comme la norme $\|k_{\pi(\varphi)}\|_{p,q}$ est finie pour μ-presque toute représentation π, il s'ensuit d'après [F-R], que pour μ-presque toute représentation $\pi\in\widehat{G}$, $\pi(\varphi)K_\pi^{\frac{-1}{q}}$ est bornée et son extension est de classe C_q sur $\mathcal{H}_\pi$.

Finalement, d'après la Remarque 2.3.2 dans [In], on a

$$(\pi(\varphi)K_\pi^{\frac{-1}{q}})^*=\pi(\varphi^{*(p)})K_\pi^{\frac{-1}{q}},$$

où

$$\varphi^{*(p)}(g)=\Delta^{\frac{-1}{p}}(g)\overline{\varphi(g^{-1})}.$$

En utilisant (3.14), on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{\widehat{G}}\|\pi(\varphi)\|_{C_q}^q\ d\mu(\pi) &\leq \int_{\widehat{G}}\|k_{\pi(\varphi)}\|_{p,q}^{\frac{q}{2}}\|k_{\pi(\varphi^{*(p)})}\|_{p,q}^{\frac{q}{2}}d\mu(\pi)\\
&\leq \Big(\int_{\widehat{G}}\|k_{\pi(\varphi)}\|_{p,q}^q d\mu(\pi)\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{\widehat{G}}\|k_{\pi(\varphi^{*(p)})}\|_{p,q}^q d\mu(\pi)\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq A_p^{q\frac{2\dim G-m}{2}}\|\varphi\|_p^{\frac{q}{2}}\ \|\varphi^{*(p)}\|_p^{\frac{q}{2}}\\
&= A_p^{q\frac{2\dim G-m}{2}}\|\varphi\|_p^q.
\end{aligned}$$

$\square$

Remarque. Le théorème précédent montre que l'application $\varphi \to \pi(\varphi)K_\pi^{\frac{-1}{q}}$ s'étend en un opérateur continu $\mathcal{F}^p : L^p(G) \to L^q(\widehat{G})$ et sa norme vérifie $\|\mathcal{F}^p(G)\| \leq A_p^{\frac{2\dim G - m}{2}}$.

2.5 Exemples

2.5.1 Un exemple fortement $*$-régulier

Considérons l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} =< A, X, Y, Z, B, V >$ munie des crochets de Lie non nuls suivants :

$$[A, B] = V,\ [A, X] = -X,\ [A, Y] = Y,\ [X, Y] = Z,$$

et dont la base duale est $\{A^*, X^*, Y^*, Z^*, B^*, V^*\}$.
On identifie le groupe de Lie exponentiel associé à $\mathfrak{g}$ avec $\mathbb{R}^6$ muni de la multiplication :

$$(a, x, y, z, b, v)\cdot(a', x', y', z', b', v') = (a+a', x'+x\mathrm{e}^{a'}, y'+y\mathrm{e}^{-a'}, z+z'-x'y\mathrm{e}^{-a'}, b+b', v+v'-ba'),$$

et de l'inversion :

$$(a, x, y, z, b, v)^{-1} = (-a,\ -x\mathrm{e}^{-a}, -y\mathrm{e}^{a}, -z - xy, -b, -v - ba).$$

La mesure de Haar sur G est donnée par $dadxdydzdbdv$ et G est unimodulaire.

Le groupe G est fortement $*$-régulier.

En effet, soit $l \in \mathfrak{g}^*$ en position générale, i.e., $l(V) \neq 0$ and $l(Z) \neq 0$. Alors l'orbite coadjointe de l contient un élément l' de la forme $l' = \lambda Z^* + \mu V^*$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

Le nil-radical $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{g}$ est engendré par $\{X, Y, Z, B, V\}$ et on a $\mathfrak{g}(l) =< V, Z >$,

$\mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}}) =< B, V, Z >,\ \mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}}) + \mathfrak{n} = \mathfrak{n}$ et ainsi $\mathfrak{d}(l)^\infty = \{0\}$.

On en déduit que $< l, \mathfrak{d}(l)^\infty >= \{0\}$.

La sous-algèbre $\mathfrak{b}(l) =< Y, Z, B, V >$ est une polarisation de Pukanszky en $l = \lambda Z^* + \mu V^*,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ et $B(l) = \exp \mathfrak{b}(l)$.

Donc $B(l)$ est unimodulaire et $\Delta_{B(l),G} \equiv 1$.

Soit χ_l le caractère unitaire de $B(l)$ défini par :

$$\chi_l(\exp A) = \mathrm{e}^{-2\pi i l(A)}, \quad \text{pour tout} \quad A \in \mathfrak{b}(l).$$

La représentation induite $\pi_l = \pi_{\lambda,\mu} = \mathrm{ind}_{B(l)}^{G}\chi_l$, de G est irréductible .

La mesure de Plancherel sur $\widehat{G}$ est identifiée à la mesure $|\lambda||\mu|d\lambda d\mu$ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$. Donc, pour $\varphi \in L^1(G) \cap L^2(G)$, la formule de Plancherel est donnée par :

$$\int_{\mathbb{R}^*}\int_{\mathbb{R}^*} \|\pi_{\lambda,\mu}(\varphi)\|_{C_2}^2 |\lambda||\mu| d\lambda d\mu = \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^6)}^2.$$

On a, pour $\xi \in \mathcal{H}_{\pi_{\lambda,\mu}}$ et $\varphi \in C_c(G)$, que

$$\pi_{\lambda,\mu}(\varphi)\xi(g) = \int_{\mathbb{R}^6} \varphi(a,x,y,z,b,v)\pi_{\lambda,\mu}(a,x,y,z,b,v)\xi(g)dtdxdydz.$$

Calculons le noyau k_φ de l'opérateur $\pi_{\lambda,\mu}(\varphi)$ en utilisant la formule 5.8 du chapitre 1.

Soient

$$g = (a,x,0,0,0,0) \in G/B(l), \;\; h = (0,0,y,z,b,v) \in B(l),$$
$$u^{-1} = (-a', -x'e^{-a'}, 0,0,0,0) \in G/B(l),$$

alors

$$ghu^{-1} \;= (\; a-a', (x-x')e^{-a'}, ye^{a'}, z+x'y, b, v-ba' \;)$$

et

$$\begin{aligned}
k_\varphi(g,u) &= k_\varphi((a,x),(a',x')) \\
&= \int_{\mathbb{R}^4} \varphi(a-a',(x-x')e^{-a'}, ye^{a'}, z+x'y, b, v-ba')e^{-i\lambda z}e^{-i\mu v}dydzdbdv \\
&= \int_{\mathbb{R}^4} \varphi(a-a',(x-x')e^{-a'}, y, z+x'ye^{a'}, b, v-ba')e^{-i\lambda z}e^{-i\mu v}e^{-a'}dydzdbdv \\
&= \int_{\mathbb{R}^4} \varphi(a-a',(x-x')e^{-a'}, y, z, b, v)e^{-i\lambda(z-x'e^{a'}y)}e^{-i\mu(v+ba')}e^{-a'}dydzdbdv.
\end{aligned}$$

Donc

$$k_\varphi((a,x),(a',x')) = \widehat{\varphi}\,(a-a',(x-x')e^{-a'},.,.,.,.,.,.)(-x'e^{-a'}\lambda, \lambda, a'\mu, \mu\,)e^{-a'}, (a,x),(a',x') \in \mathbb{R}^2,$$

où $\widehat{\varphi}$ est la transformée de Fourier partielle dans les quatre dernières variables.

D'après la Proposition 2.1, on en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \|k_\varphi\|_{p,q}^q |\lambda||\mu| d\lambda d\mu \leq A_p^{4q} \ \|\varphi\|_p^q.$$

On peut le vérifier par le calcul.

$$\int_{\mathbb{R}^2} \|k_\varphi\|_{p,q}^q |\lambda||\mu| d\lambda d\mu$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}\Big(\int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{\varphi}\,(a{-}a', (x{-}x')e^{-a'}, ., ., ., ., .)(-x'e^{-a'}\lambda, \lambda, a'\mu, \mu)e^{-a'}|^p dadx\Big)^{\frac{q}{p}} da'dx'|\lambda||\mu|d\lambda d\mu$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}\Big(\int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{\varphi}\,(a, x, . \,, . \,, . \,, .)(-x'e^{-a'}\lambda, \lambda, a'\mu, \mu)e^{\frac{-a'}{q}}|^p dadx\Big)^{\frac{q}{p}} da'dx'|\lambda||\mu|d\lambda d\mu$$

(par l'inégalité de Minkowski généralisée)

$$\leq \Big(\int_{\mathbb{R}^2}\Big(\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{\varphi}\,(a, x, ., ., ., ., .)(-x'e^{-a'}\lambda, \lambda, a'\mu, \mu\,)|^q e^{-a'} da'dx'|\lambda||\mu|d\lambda d\mu\Big)^{\frac{p}{q}} dadx\Big)^{\frac{q}{p}}$$

$$\leq \Big(\int_{\mathbb{R}^2}\Big(\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{\varphi}\,(a, x, . \,, . \,, . \,, .\,)(x', \lambda, a', \mu)|^q da'dx'd\lambda d\mu\Big)^{\frac{p}{q}} dadx\Big)^{\frac{q}{p}}$$

(par le résultat de Beckner)

$$\leq A_p^{4q}\Big(\int_{\mathbb{R}^2} \|\varphi\,(a, x, . \,, . \,, . \,, .\,)\|_p^p dadx\Big)^{\frac{q}{p}}, \text{ où } A_p = \Big(\frac{p^{\frac{1}{p}}}{q^{\frac{1}{q}}}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}^2} \|k_\varphi\|_{p,q}^q |\lambda||\mu| d\lambda d\mu \leq A_p^{4q} \ \|\varphi\|_p^q.$$

2.5.2 Le groupe de Boidol

Dans cet exemple, on a affaire à un groupe qui n'est pas fortement $*$-régulier. On va voir que les méthodes utilisées ne peuvent donner une estimation de la transformée de Fourier L^p.

Soit $\mathfrak{g} =< T, X, Y, Z >$ munie des crochets de Lie suivants :

$$[X, Y] = Z,\ [T, Y] = Y,\ [T, X] = -X.$$

Soit $\{T^*, X^*, Y^*, Z^*\}$ la base duale de $\mathfrak{g}$. On identifie le groupe $G = \exp \mathfrak{g}$ avec $\mathbb{R}^4$ et sa multiplication est donnée par :

$$(t, x, y, z) \cdot (t', x', y', z') = (t + t', x' + x\mathrm{e}^{t'}, y' + y\mathrm{e}^{-t'}, z + z' - yx'\mathrm{e}^{-t'})$$

et l'inversion :

$$(t, x, y, z)^{-1} = (-t, -x\mathrm{e}^{-t}, -y\mathrm{e}^{t}, -xy - z).$$

La mesure de Haar dans G est donnée par $dtdxdydz$ et la fonction module Δ est identiquement égale à 1. Les G-orbites en position générale sont paramétrées par $\lambda Z^* + \mu T^*$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. La mesure de Plancherel sur $\widehat{G}$ est identifiée à la mesure $|\lambda| d\lambda d\mu$ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Donc, pour $\varphi \in L^1(G) \cap L^2(G)$, la formule de Plancherel est décrite par :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^*} \|\pi_{\lambda Z^* + \mu T^*}(\varphi)\|_{C_2}^2 |\lambda| d\lambda d\mu = \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^2.$$

Le groupe G ne possède pas la $*$-régularité forte.

En effet, si l'on prend $l = \lambda Z^* + \mu T^*$ $(\lambda \neq 0)$, alors

$$\mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}}) =< Z, T >,\ \mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}}) + \mathfrak{n} = \mathfrak{g} \ \text{ et } \ (\mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}}) + \mathfrak{n})^{\infty} = \mathfrak{n}.$$

Ceci implique que $< l, (\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n})^{\infty} > \neq \{0\}$.

La sous-algèbre $\mathfrak{b}(l) =< T, Y, Z >$ est une polarisation de Pukanszky en $l = \lambda Z^* + \mu T^*$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Donc $B(l) = \exp \mathfrak{b}(l)$ est non unimodulaire et on obtient :

$$\Delta_{B(l)}(t, y, z) = \Delta_{B(l),G}(t, y, z) = \mathrm{e}^{-t},\ \text{ pour } t, y, z \in \mathbb{R}.$$

Soit χ_l le caractère de $B(l)$ défini par :

$$\chi_l(\exp A) = \mathrm{e}^{-2i\pi l(A)}, \quad \text{pour tout } \ A \in \mathfrak{b}(l).$$

La représentation induite $\pi_l = \pi_{\lambda,\mu} = \mathrm{ind}_{B(l)}^G \chi_l$, de G est irréductible et agit sur $L^2(\mathbb{R})$

par :

$$\pi_{\lambda,\mu}(t,x,y,z)\xi(a) = \mathrm{e}^{2i\pi(\lambda(xy+z-ay\mathrm{e}^t)+\mu t)}\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\xi(a\mathrm{e}^t - x), \quad \text{pour tout } \xi \in L^2(\mathbb{R}) \text{ et } a \in \mathbb{R}.$$

Pour $\varphi \in C_c(G)$, le noyau k_φ de l' opérateur $\pi_{\lambda,\mu}$ est donné par :

$$k_\varphi(x,a) = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(t, a\mathrm{e}^t - x, y, z)\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\mathrm{e}^{2i\pi(\lambda(z-xy)+\mu t)}dtdydz, \ x, a \in \mathbb{R}.$$

Essayons de donner une estimation de la norme $\|\mathcal{F}^p(G)\|$.

Comme $(k_\varphi)^* = k_{\varphi^*}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} \|\pi_{\lambda,\mu}(\varphi)\|_{C_q}^q |\lambda| d\lambda d\mu \le \int_{\mathbb{R}^2} \|k_\varphi\|_{p,q}^{\frac{q}{2}} \ \|k_{\varphi^*}\|_{p,q}^{\frac{q}{2}} |\lambda| d\lambda d\mu$$

$$\le \Big(\int_{\mathbb{R}^2} \|k_\varphi\|_{p,q}^q |\lambda| d\lambda d\mu\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{\mathbb{R}^2} \|k_{\varphi^*}\|_{p,q}^q |\lambda| d\lambda d\mu\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme la dimension des orbites génériques est 2, on aimerait avoir :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \|k_\varphi\|_{p,q}^q |\lambda| d\lambda d\mu \le A_p^{3q} \|\varphi\|_p^q.$$

Malheureusement,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \|k_\varphi\|_{p,q}^q |\lambda| d\lambda d\mu = \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} |k_\varphi(a,x)|^p da\Big)^{\frac{q}{p}} dx |\lambda| d\lambda d\mu$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} \Big(\int_{\mathbb{R}} \Big| \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(t, a\mathrm{e}^t - x, y, z)\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\mathrm{e}^{2i\pi(\lambda(z-xy)+\mu t)}dtdydz\Big|^p da\Big)^{\frac{q}{p}} dx |\lambda| d\lambda d\mu$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} \Big(\int_{\mathbb{R}} \Big| \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(t, a\mathrm{e}^t - x, \cdot, \cdot)(\lambda, -\lambda x)\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\mathrm{e}^{2i\pi\mu t}dt\Big|^p da\Big)^{\frac{q}{p}} dx |\lambda| d\lambda d\mu$$

(on considère la fonction $\zeta_{a,x}(t) = \widehat{\varphi}(t, a\mathrm{e}^t - x, \cdot, \cdot)(\lambda, -\lambda x)\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}$)

$$= \int_{\mathbb{R}^3} \Big(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\zeta}_{a,x}(\mu)|^p da\Big)^{\frac{q}{p}} dx |\lambda| d\lambda d\mu$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^2} \Big(\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\zeta}_{a,x}(\mu)|^q d\mu\Big)^{\frac{p}{q}} da\Big)^{\frac{q}{p}} dx |\lambda| d\lambda$$

(d'après l'inégalité de Minkowski généralisée)

$$\leq A_p^q \int_{\mathbb{R}^2} \Big(\int_{\mathbb{R}^2} |\zeta_{a,x}(t)|^p dtda \Big)^{\frac{q}{p}} dx|\lambda| d\lambda$$

(d'après le résultat de Beckner pour $\mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}
&= A_p^q \int_{\mathbb{R}^2} \Big(\int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{\varphi}(t, ae^t - x, \cdot, \cdot)(\lambda, -\lambda x)|^p e^{\frac{pt}{2}} dtda \Big)^{\frac{q}{p}} dx|\lambda| d\lambda \\
&= A_p^q \int_{\mathbb{R}^2} \Big(\int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{\varphi}(t, a, \cdot, \cdot)(\lambda, -\lambda x)|^p e^{(\frac{p}{2}-1)t} dtda \Big)^{\frac{q}{p}} dx|\lambda| d\lambda \\
&\leq A_p^q \Big(\int_{\mathbb{R}^2} \Big(\int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{\varphi}(t, a, \cdot, \cdot)(\lambda, -\lambda x)|^q dx|\lambda| d\lambda \Big)^{\frac{p}{q}} e^{(\frac{p}{2}-1)t} dtda \Big)^{\frac{q}{p}}
\end{aligned}$$

(d'après l'inégalité de Minkowski généralisée).

Ce qui montre que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \|k_\varphi\|_{p,q}^q |\lambda| d\lambda d\mu \leq A_p^{3q} \Big(\int_{\mathbb{R}^4} |\varphi(t, a, y, z)|^p e^{(\frac{p}{2}-1)t} dtdadydz \Big)^{\frac{q}{p}}$$

d'après le résultat de Beckner pour $\mathbb{R}^2$.

Mais le terme de droite de cette inégalité est différente de $A_p^{3q} \|\varphi\|_p^q$.

Remarque. Il reste tout de même un espoir d'obtenir l'inégalité dans ce cas particulier. Rappelons le Théorème 2 que l'on trouve dans [K-R] page 187 :

Théorème. *Si $G = X \ltimes A$ est le produit semi-direct des groupes localement compacts unimodulaires X et A et si G est unimodulaire, alors pour $p = \dfrac{2k}{2k-1}$, k un entier ≥ 2, on alors*

$$\|\mathcal{F}^p(G)\| \leq \|\mathcal{F}^p(X)\| \|\mathcal{F}^p(A)\|.$$

Ainsi, si on considère le groupe de Boidol comme le produit semi-direct du groupe de Heisenberg $H = \exp(< X, Y, Z >)$ et le groupe abélien $\exp(\mathbb{R}T)$, alors par le théorème ci-dessus, on obtient dans le cas particulier où $p = \dfrac{2k}{2k-1}$, k un entier ≥ 2,

$$\|\mathcal{F}^p(G)\| \leq \|\mathcal{F}^p(H)\| \|\mathcal{F}^p(\mathbb{R})\| = A_p^3.$$

Chapitre 3

Théorème d'inversion de Fourier pour les groupes de Lie nilpotents

3.1 Introduction

Cette section est une adaptation et une généralisation des résultats d'analyse harmonique sur $\mathbb{R}^n$ à des groupes localement compacts plus généraux. Parmi les groupes pour lesquels on peut espérer les meilleurs résultats, on trouve les groupes de Lie nilpotents connexes, simplement connexes. Par bien des aspects, ils ressemblent presque à $\mathbb{R}^n$ et leur théorie des représentations est bien établie, alors qu'il existe tout de même des différences importantes dans leurs comportements (voir [C-G]). L'un des plus fameux et utiles résultats de l'analyse harmonique sur $\mathbb{R}^n$ est le théorème d'inversion de Fourier. Il est donc naturel de savoir si on peut le généraliser aux groupes de Lie nilpotents. Ce problème peut être formulé de la manière suivante :

Soit $G = \exp \mathfrak{g}$ un groupe de Lie nilpotent connexe, simplement connexe. Considérons l'application qui associe à chaque fonction $f \in L^1(G)$ la famille $\Big(\pi_l(f)\Big)_{l\in\mathfrak{g}^*/Ad^*G}$ des images de f par les représentations irréductibles unitaires de G. Cette application peut être considérée comme une généralisation de la transformée de Fourier au cas non-abélien. On sait que $\pi_l(f)$ est complètement déterminée par son noyau

$$F(l, x, y) = \int_{B_l} f(xuy^{-1})e^{-2\pi i<l,\log u>}du,$$

où $B_l = \exp \mathfrak{b}_l$ pour une polarisation $\mathfrak{b}_l$ en l. Donc la question de savoir s'il existe un théorème d'inversion de Fourier comme dans le cas abélien peut être formulée comme cela :

Etant donnée une fonction $F(l,x,y)$ satisfaisant certaines hypothèses, existe-t-il une fonction $f \in L^1(G)$ telle que $\pi_l(f)$ admette $F(l,\cdot,\cdot)$ comme noyau pour presque toute forme linéaire l ? Si une telle fonction f existe, elle est nécessairement unique, en tant que fonction L^1.

Pour une forme linéaire fixée $l_0 \in \mathfrak{g}_0^*$, on a le résultat de Howe [Ho] :

Soit $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{b}(l_0)$ une polarisation en l_0, soit $B_0 = \exp \mathfrak{b}_0$, soit χ_{l_0} le caractère unitaire de B_0 défini par $\chi_{l_0}(h) = e^{-2\pi i < l_0, \log h>}$ pour tout $h \in B_0$.

Soit $F \in \mathcal{S}((G/B_0)^2, l_0)$, c'est-à-dire que F est une fonction de Schwartz sur $G/B_0 \times G/B_0$ qui vérifie la condition de covariance

$$F(xh, yh') = \overline{\chi_{l_0}(h)}\chi_{l_0}(h')F(x,y), \quad \forall x,y \in G, \forall h,h' \in B_0.$$

Alors il existe une fonction $f \in \mathcal{S}(G)$, l'espace de Schwartz de G, telle que $\pi_{l_0}(f)$ admette F comme noyau. Ce résultat a été généralisé aux groupes de Lie exponentiels résolubles par Andele et Ludwig dans [A]. Mais ces résultats ne sont démontrés que pour une forme linéaire fixée $l_0 \in \mathfrak{g}^*$. Notre résultat principal est le suivant :

Théorème 3.1. *Soit $G = \exp \mathfrak{g}$ un groupe de Lie nilpotent connexe, simplement connexe, muni d'une base de Jordan-Hölder fixe.*

Pour chaque $l \in \mathfrak{g}^*$, posons $\mathfrak{b}_l$ la polarisation de Vergne correspondante et $B_l = \exp \mathfrak{b}_l$. Alors il existe un ouvert de Zariski $\mathfrak{g}^*_{gen}$ de $\mathfrak{g}^*$, tel que pour toute fonction $\mathcal{C}^\infty$

$F : \mathfrak{g}^*_{gen} \times G \times G \to \mathbb{C}$ qui, pour $l \in \mathfrak{g}^*_{gen}$ fixée, est Schwartz sur $G/B_l \times G/B_l$, qui est à support compact en l (si on se restreint à une section d'orbite) et qui vérifient la relation de covariance

$$F(l, xh, yh') = \overline{\chi_l(h)}\chi_l(h')F(l,x,y),$$

il existe une unique fonction $f \in \mathcal{S}(G)$ telle que $\pi_l(f)$ admette $F(l,\cdot,\cdot)$ comme noyau, pour chaque $l \in \mathfrak{g}^*_{gen}$.

L'application $F \mapsto f$ est continue par rapport aux topologies des espaces de fonctions considérés.

La preuve du théorème d'inversion de Fourier se fera par récurrence. A chaque étape de cette récurrence, de nouveaux paramètres apparaîtront et seront utilisés au moyen des structures de Lie variables.

Remarque. On peut aussi construire la fonction f en utilisant la formule suivante :

$$f(g) = \int_{\mathfrak{g}^*_{gen}} \mathrm{tr}(\pi_l(g)^{-1} \cdot \pi_l(f)) d\mu(l), \ g \in G,$$

soit, en utilisant $F(l, \cdot, \cdot)$,

$$f(g) = \int_{\mathfrak{g}^*_{gen}} \int_{G/B_l} F(l, gx, x) d\dot{x} d\mu(l).$$

Cette formule se trouve dans [C-G] par exemple.

3.2 Les groupes et algèbres de Lie nilpotents variables

Les notions d'algèbres variables ont été introduites dans [L-L] pour démontrer que l'application de Kirillov est un homéomorphisme dans le cas des groupes de Lie exponentiels. Grossièrement, se donner une algèbre variable revient à se donner un espace muni d'un champ de crochets de Lie paramétrisé par un ensemble, i.e., les tenseurs de structure sont variables. Plus précisément :

Définition 3.1. Soient $\mathfrak{g}$ un espace vectoriel réel de dimension finie n et $\mathcal{B}$ un ensemble non vide. On dit que $(\mathfrak{g}, \mathcal{B})$ est une **algèbre de Lie nilpotente variable** si :

1. Pour chaque $b \in \mathcal{B}$, il existe un crochet de Lie $[\cdot, \cdot]_b$ défini sur $\mathfrak{g}$ tel que $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]_b)$ est une algèbre de Lie nilpotente.
2. Il existe une base fixée $\{Z_1, \dots, Z_n\}$ de $\mathfrak{g}$ telle que les constantes de structure $a^k_{ij}(b)$ définies par :
$$[Z_i, Z_j]_b = \sum_{k=1}^{n} a^k_{ij}(b) Z_k$$
satisfont la propriété suivante :
Pour tout $b \in \mathcal{B}$, pour $k \leq \max(i, j)$, $a^k_{ij}(b) = 0$. Ceci signifie que $\{Z_1, \dots, Z_n\}$ est une base de Jordan-Hölder pour $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]_b)$.

L'algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]_b)$ sera notée $\mathfrak{g}_b$.

Si de plus $\mathcal{B}$ est un sous-ensemble algébrique d'un espace vectoriel réel de dimension finie W, i.e., il existe deux fonctions polynômiales P, Q sur W telles que

$$\mathcal{B} = \{w \in W,\ P(w) = 0 \text{ et } Q(w) \neq 0\},$$

on dit que $(\mathfrak{g}, \mathcal{B})$ est **une algèbre de Lie polynômialement variable** si les constantes de structure $a_{ij}^k(b)$ sont des fonctions polynômiales en b.

De même, on dit que $(\mathfrak{g}, \mathcal{B})$ est **algèbre de Lie rationnellement variable** si les constantes de structure $a_{ij}^k(b)$ sont des fonctions rationnelles en b.

Dans ce cas on pourra supposer que ces fonctions n'ont pas de singularité dans $\mathcal{B}$, en remplaçant, si nécessaire, $\mathcal{B}$ par un ouvert dense de Zariski.

Définition 3.2. Le **groupe de Lie variable associé** $(G, \mathcal{B})$ **à** $(\mathfrak{g}, \mathcal{B})$ est défini par la famille de groupes de Lie nilpotents connexes, simplement connexes $(G, \cdot_b)$, où $G = \mathfrak{g}$ en tant qu'ensemble et où la loi du groupe $\cdot_b$ sur G est obtenue par la formule de Campbell-Baker-Hausdorff pour le crochet $[\cdot, \cdot]_b$, i.e. :

$$x \cdot_b y = x + y + \frac{1}{2}[x, y]_b + \frac{1}{12}[x, [x, y]_b]_b + \frac{1}{12}[y, [y, x]_b]_b + \ldots,\ \forall x, y \in G_b.$$

Le groupe de $(G, \cdot_b)$ sera noté G_b.

Remarques. 1. En fait, avec ces choix, l'application exponentielle $\exp_b :\ \mathfrak{g}_b \to G_b$ est l'application identité.

2. Si $\mathcal{B}$ est réduit à un point, i.e., on oublie la structure variable sur G ou $\mathfrak{g}$, alors $(G, \mathcal{B})$ sera identifié à un groupe de Lie nilpotent.

3.3 Construction d'indices

Dans cette section nous allons rappeler les constructions de Ludwig et Müller [Lu-Mu]. Tout d'abord nous allons construire des familles d'indices qui vont nous permettre de définir les éléments génériques dans les algèbres de Lie variables pour pouvoir décrire le dual unitaire de $(G, \mathcal{B})$, c'est-à-dire, l'ensemble $(\widehat{G}_b)_{b \in \mathcal{B}}$, où $\widehat{G}_b$ désigne le dual unitaire du groupe de Lie nilpotent $(G_b, \cdot b)$.

3.3.1 Indices associés à $(\mathfrak{g}, \mathcal{B})$

Pour chaque $b \in \mathcal{B}$, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_b)$ désignera le centre de $\mathfrak{g}_b$.

Posons :

$$\begin{aligned} j_1(b) &:= \max\{j \mid Z_j \notin \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_b)\} \\ k_1(b) &:= \max\{k \mid [Z_{j_1(b)}, Z_k]_b \neq 0\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} j_1 &:= \max\{j_1(b) \mid b \in \mathcal{B}\} \\ k_1 &:= \max\{k_1(b) \mid b \in \mathcal{B} \text{ et } j_1(b) = j_1\}. \end{aligned}$$

Par construction, $k_1(b) < j_1(b)$ et $k_1 < j_1$.

Les indices $j_2(b), \ldots, j_d(b); k_2(b), \ldots, k_d(b); j_2, \ldots, j_d; k_2, \ldots, k_d$ seront construits plus tard.

3.3.2 Indices associés aux formes linéaires sur $\mathfrak{g}$

Soit $\mathfrak{g}^*$ l'espace vectoriel dual de $\mathfrak{g}$.

Pour chaque $(b, l) \in \mathcal{B} \times \mathfrak{g}^*$, soit $\mathfrak{a}(b, l)$ le plus grand idéal de $\mathfrak{g}_b$ contenu dans le stabilisateur $\mathfrak{g}_b(l)$ de l dans $\mathfrak{g}_b$.

Si $\mathfrak{a}(b, l) = \mathfrak{g}_b$, l'ensemble d'indices correspondant sera vide. Dans ce cas, $\mathfrak{g}_b(l) = \mathfrak{g}_b$ et soit $\mathfrak{g}_b$ est commutative, soit l n'est pas une forme linéaire générique.

Sinon on définit les indices $j_1(b, l)$ et $k_1(b, l)$ par

$$\begin{aligned} j_1(b,l) &:= \max\{j \in \{1, \ldots, n\} \mid Z_j \notin \mathfrak{a}(b, l)\} \\ k_1(b,l) &:= \max\{k \in \{1, \ldots, n\} \mid \; < l, [Z_{j_1(b,l)}, Z_k]_b > \neq 0\}. \end{aligned}$$

On a encore $k_1(b, l) < j_1(b, l)$.

Les indices $j_2(b,l),\ldots,j_d(b,l)$ et $k_2(b,l),\ldots,k_d(b,l)$ seront construits plus tard de la même manière.

3.3.3 Restriction du choix des formes linéaires

Nous allons restreindre notre choix d'éléments (b,l).

Posons $\mathcal{D}_0 := \mathcal{B} \times \mathfrak{g}^*$ et

$$\mathcal{D}_1 := \{(b,l) \in \mathcal{D}_0 \mid j_1(b,l) = j_1 \text{ et } k_1(b,l) = k_1\}.$$

Lemme 3.1. Si $\mathcal{B}$ est un ensemble algébrique, $\mathcal{D}_1$ est un ouvert de Zariski dense de $\mathcal{D}_0$, plus précisément

$$\mathcal{D}_1 = \{(b,l) \in \mathcal{D}_0 \mid \ < l, [Z_{j_1}, Z_{k_1}]_b > \neq 0\}.$$

Démonstration. Si $j_1(b,l) = j_1$ et $k_1(b,l) = k_1$, alors, d'après les définitions des indices,

$$< l, [Z_{j_1}, Z_{k_1}]_b > = < l, [Z_{j_1(b,l)}, Z_{k_1(b,l)}]_b > \neq 0.$$

Réciproquement, supposons que $< l, [Z_{j_1}, Z_{k_1}]_b > \neq 0$, alors $Z_{j_1} \notin \mathfrak{g}_b(l)$,

or $\mathfrak{a}(b,l)$ est contenu dans $\mathfrak{g}_b(l)$, donc $Z_{j_1} \notin \mathfrak{a}(b,l)$. Prenons $j < j_1$, alors $Z_j \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_b)$ et $Z_j \in \mathfrak{a}(b,l)$ qui contient le centre de $\mathfrak{g}_b$, on en déduit que $j_1(b,l) = j_1$.

Ainsi $< l, [Z_{j_1(b,l)}, Z_{k_1}]_b > \neq 0$, donc $k_1(l,b) \leq k_1$, cependant si $k > k_1$ alors $[Z_{j_1}, Z_k] = 0$, d'où $< l, [Z_{j_1}, Z_k]_b > = 0$.

En conclusion $k_1(b,l) = k_1$ et on a démontré que

$$\mathcal{D}_1 = \{(b,l) \in \mathcal{D}_0 \mid \ < l, [Z_{j_1}, Z_{k_1}]_b > \neq 0\}.$$

De plus l'application $(l,b) \mapsto < l, [Z_{j_1}, Z_{k_1}]_b >$ est linéaire en l, rationnelle en b. On peut supposer, quitte à multiplier par le plus petit dénominateur commun, qu'elle est même polynômiale en b. Ainsi cette application est polynômiale en (b,l) et donc $\mathcal{D}_1$ est un ouvert de Zariski de $\mathcal{D}_0$. $\square$

3.3.4 Construction d'un idéal de codimension un dans $\mathfrak{g}_b$.

Posons encore $I_0 := \{1, \ldots, n\}$ et $I_1 := I_0 \setminus \{k_1\}$.
Pour $(b, l) \in \mathcal{D}_1$, définissons

$$\mathfrak{p}_1(b, l) := \{X \in \mathfrak{g} \mid \ < l, [Z_{j_1(b,l)}, X]_b >= 0\} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \ < l, [Z_{j_1}, X]_b >= 0\}$$

et

$$Z_i^1(b, l) := Z_i - \frac{< l, [Z_{j_1(b,l)}, Z_i]_b >}{< l, [Z_{j_1(b,l)}, Z_{k_1(b,l)}]_b >} Z_{k_1(b,l)} = Z_i - \frac{< l, [Z_{j_1}, Z_i]_b >}{< l, [Z_{j_1}, Z_{k_1}]_b >} Z_{k_1}, \quad \forall i \in I_1$$

(comme $(b, l) \in \mathcal{D}_1$).
On voit facilement que $\mathfrak{p}_1(b, l)$ est un idéal de codimension un dans $\mathfrak{g}_b$ et que $\{Z_i^1(b, l) \mid i \in I_1\}$ est une base de Jordan-Hölder pour $\mathfrak{p}_1(b, l)$ (voir [L-Z]).
De plus, $Z_i^1(b, l) = Z_i$ si $i > k_1$.

3.3.5 Les éléments génériques dans $\mathcal{B} \times \mathfrak{g}^*$

On construit les indices $j_i(b, l), k_i(b, l), j_i(b), k_i(b), j_i, k_i$ de la manière suivante :

On utilise l'algèbre $\mathfrak{p}_1(b, l)$, la base $Z_i^1(b, l), l|_{\mathfrak{p}_1(b,l)}$ pour construire les indices $j_2(b, l), k_2(b, l)$, l'algèbre $\mathfrak{p}_2(b, l)$ (qui est un idéal de codimension un dans $\mathfrak{p}_1(b, l)$), $Z_i^2(b, l)$ est la base de $\mathfrak{p}_2(b, l)$ et on continue jusqu'à ce que ce processus s'arrête au bout d'un nombre fini d'étapes.

Récursivement on définit $\mathcal{D}_i, j_i(b), k_i(b), j_i, k_i, I_i$ par

$$\begin{array}{rcl}
j_i(b) & := & \max\{j \in I_{i-1} \mid Z_j^{i-1}(b, l) \notin \text{ Centre}(\mathfrak{p}_{i-1}(b, l)), \forall l \text{ tel que } (b, l) \in \mathcal{D}_{i-1}\} \\
k_i(b) & := & \max\{k \in I_{i-1} \mid [Z_{j_i}^{i-1}(b, l), Z_k^{i-1}(b, l)]_b \neq 0, \forall l \text{ tel que } (b, l) \in \mathcal{D}_{i-1}\} \\
j_i & := & \max\{j_i(b) \mid b \in \mathcal{B}\} \\
k_i & := & \max\{k_i(b) \mid b \in \mathcal{B} \text{ et } j_i(b) := j_i\} \\
\mathcal{D}_i & := & \{(b, l) \in \mathcal{D}_{i-1} \mid j_i(b, l) = j_i \text{ et } k_i(b, l) = k_i\} \\
I_i & := & I_{i-1} \setminus \{k_i\}.
\end{array}$$

Ce processus s'arrête au bout d'un nombre fini d d'étapes.

Alors on sait, d'après [L-Z], que pour chaque $(b, l) \in \mathcal{D}_d$, $\mathfrak{p}_d(b, l)$ est la polarisation de Vergne en l dans $\mathfrak{g}_b$ par rapport à la base $\{Z_1, \ldots, Z_n\}$.

Si $\mathcal{B}$ est un ensemble algébrique, l'ensemble

$$\mathcal{D}_{gen} := \mathcal{D}_d \subset \mathcal{B} \times \mathfrak{g}^*$$

est un ouvert de Zariski de $\mathcal{B} \times \mathfrak{g}^*$, appelé l'**ensemble des éléments génériques** de $\mathcal{B} \times \mathfrak{g}^*$.

Si $\mathcal{B}$ est réduit à un point, i.e., s'il n'y a pas de structure variable, alors $\mathcal{D}_{gen}$ est identifié à l'ouvert de Zariski $\mathfrak{g}^*_{gen}$ de $\mathfrak{g}^*$, appelé l'**ensemble des éléments génériques** de $\mathfrak{g}^*$. On a

$$\mathfrak{g}^*_{gen} \subset \mathfrak{g}^*_{Puk} \subset \mathfrak{g}^*_{max} \subset \mathfrak{g}^*,$$

où $\mathfrak{g}^*_{Puk}$ désigne les éléments de $\mathfrak{g}^*$ qui sont en position au sens de Pukanszky relativement à la base $(Z_i)_i$ et $\mathfrak{g}^*_{max}$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{g}^*$ dont l'orbite coadjointe est de dimension maximale.

3.3.6 Restriction aux sections des orbites

D'après [L-Z], $\mathcal{D}_r$, $r \in \{1, \ldots, d\}$ et $\mathcal{D}_{gen}$ sont Ad^*-invariants, i.e., pour tout $g \in G$,

$$\begin{aligned} (b, l) \in \mathcal{D}_r \quad &\Leftrightarrow \quad (b, \mathrm{Ad}^*(g)l) \in \mathcal{D}_r \\ (b, l) \in \mathcal{D}_{gen} \quad &\Leftrightarrow \quad (b, \mathrm{Ad}^*(g)l) \in \mathcal{D}_{gen}. \end{aligned}$$

Ceci nous permet de nous restreindre aux sections des orbites, obtenues de la manière suivante :

Pour chaque $b \in \mathcal{B}$ fixé, soit S_b l'ensemble des indices de saut au sens de Pukanszky pour l'algèbre $\mathfrak{g}_b$ et soit $T_b = \{1, \ldots, n\} \setminus S_b$.

Posons $V_{T_b} = \sum_{i \in T_b} \mathbb{R} Z_i^*$. On sait que chaque orbite coadjointe dans $\mathfrak{g}_b^*$ rencontre V_{T_b} en un point exactement, et réciproquement. Donc V_{T_b} représente une section des orbites coadjointes de $\mathfrak{g}_b^*$.

Remarquons que $l \in V_{T_b}$ si et seulement si $< l, Z_j >= 0$ pour tout indice de saut $j \in S_b$.

Dans de nombreuses situations, on se restreint à ces sections d'orbites, ce qui nous permet de supposer que les formes linéaires l s'annulent dans les coordonnées correspondant aux indices de saut.

Pour ce faire, notons $\mathcal{S}$ la réunion de ces sections d'orbites, ou, plus précisement,

$$\mathcal{S} = \bigcup_{b \in \mathcal{B}} \{b\} \times V_{T_b} \text{ et } \mathcal{D}_{T,gen} = \mathcal{D}_{gen} \cap \mathcal{S}.$$

Alors $\mathcal{D}_{T,gen}$ est un ouvert de Zariski de $\mathcal{S}$. Considérons à présent

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &:= \{b \in \mathcal{B} \mid \exists l \in \mathfrak{g}^* \text{ tel que } (b,l) \in \mathcal{D}_{T,gen}\} \\ &= \{b \in \mathcal{B} \mid \exists l \in \mathfrak{g}^* \text{ tel que } (b,l) \in \mathcal{D}_{gen}\}. \end{aligned}$$

Soit $(b,l) \in \mathcal{D}_{gen}$. On sait que l est en position générale dans $\mathfrak{g}_b^*$ au sens de Pukanszky. De plus, l'ensemble des indices de saut S_b de $\mathfrak{g}_b^*$ coincide avec l'ensemble

$$\{j_i(b,l), k_i(b,l) \mid 1 \leq i \leq d\} = \{j_i, k_i \mid 1 \leq i \leq d\}$$

construit dans cette section (pour la forme linéaire l donnée) et est donc indépendant de b, si $b \in \mathcal{B}_1$. Ainsi, pour tout $b \in \mathcal{B}_1$, les ensembles S_b, respectivement T_b coincident. Notons T cet ensemble commun et $V_T = \sum_{i \in T} \mathbb{R} Z_i^*$.

Il est clair que

$$\mathcal{D}_{T,gen} = \mathcal{D}_{gen} \cap (\mathcal{B}_1 \times V_T).$$

Remarque. Si $\mathcal{B}$ est réduit à un point, alors $\mathcal{D}_{T,gen}$ est identifié à

$$\mathfrak{g}_{T,gen}^* = \mathfrak{g}_{gen}^* \cap V_T,$$

l'ensemble des éléments génériques contenus dans la section d'orbite V_T.

3.4 De nouveaux paramètres

Soient j_1 et k_1 définis précédemment.

Posons $X := Z_{k_1}, Y := Z_{j_1}$ et $Z_b := [Z_{k_1}, Z_{j_1}]_b = [X, Y]_b$. Comme $(Z_j)_j$ est une base de Jordan-Hölder pour tout $\mathfrak{g}_b$,

$$[Z_{j_1}, U]_b \subset < Z_{j_1+1}, \ldots, Z_n > \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_b), \forall U \in \mathfrak{g}_b,$$

où les définitions $\mathfrak{p}_1(b,l)$ et les bases $(Z_i^1(b,l))_i$ dépendent en fait seulement de $l_{|<Z_{j_1+1},\ldots,Z_n>}$ et plus particulièrement de son noyau $\ker(l_{|<Z_{j_1+1},\ldots,Z_n>})$.

Pour $\mathfrak{p}_1(b,l)$, ceci est clair par définition. Pour chaque vecteur de base $Z_i^1(b,l)$, remarquons qu'on doit écrire

$$< Z_{j_1+1}, \ldots, Z_n > = \mathbb{R}Z_b \oplus \ker(l_{|<Z_{j_1+1},\ldots,Z_n>}),$$

qui, pour b fixé, $l_{|<Z_{j_1+1},\ldots,Z_n>}$ est complètement déterminé par sa valeur sur Z_b et par $\ker(l_{|<Z_{j_1+1},\ldots,Z_n>})$ et qui donc $\frac{<l,[Z_{j_1},Z_i]_b>}{<l,[Z_{j_1},Z_{k_1}]_b>}$ dépend uniquement de $\ker(l_{|<Z_{j_1+1},\ldots,Z_n>})$ (si $(b,l) \in \mathcal{D}_{T,gen}$ et donc $< l, [Z_{j_1}, Z_{k_1}]_b > \neq 0$).

De ce point de vue, faire varier l signifie considérer tous les sous-espaces de codimension un $V(b)$ de $< Z_{j_1+1}, \ldots, Z_n >$ tels que $Z_b \notin V(b)$. Donc, à la place de caractériser $\mathfrak{p}_1(b,l)$ par (b,l), on doit aussi le caractériser par b et un sous-espace $V(b)$, respectivement par b et un vecteur de base de $V(b)$. Ceci nous conduit à la paramétrisation suivante :

Soit $m := n - j_1$ et identifions $< Z_{j_1+1}, \ldots, Z_n >$ avec $\mathbb{R}^m$ grâce à la base $\{Z_{j_1+1}, \ldots, Z_n\}$. Un sous-espace de codimension un de $< Z_{j_1+1}, \ldots, Z_n >$ est alors caractérisé par les vecteurs $\widetilde{b} = (\widetilde{b}_1, \ldots, \widetilde{b}_{m-1}) \in (\mathbb{R}^m)^{m-1}$ tel que les $\widetilde{b}_i$ sont linéairement indépendants, i.e., par un ouvert de Zariski de $(\mathbb{R}^m)^{m-1}$.

Les sous-espaces $V(b)$ considérés ici vérifient la condition supplémentaire $Z_b \notin V(b)$, qui peut être décrite par $\det(Z_b, \widetilde{b}_1, \ldots, \widetilde{b}_{m-1}) \neq 0$, qui donne encore un ouvert de Zariski de $(\mathbb{R}^m)^{m-1}$.

Posons

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &:= \{(b,\widetilde{b}) \in \mathcal{B} \times (\mathbb{R}^m)^{m-1} \mid \widetilde{b}_i \text{ linéairement indépendants}\} && (4.1)\\
\mathcal{E}_1 &:= \{(b,\widetilde{b}) \in \mathcal{E} \mid \det(Z_b, \widetilde{b}_1, \ldots, \widetilde{b}_{m-1}) \neq 0\} && (4.2)\\
\mathcal{E}' &:= \{(b,\widetilde{b}) \in \mathcal{B}_1 \times (\mathbb{R}^m)^{m-1} \mid \widetilde{b}_i \text{ linéairement indépendants}\} && (4.3)\\
\mathcal{E}'_1 &:= \{(b,\widetilde{b}) \in \mathcal{E}' \mid \det(Z_b, \widetilde{b}_1, \ldots, \widetilde{b}_{m-1}) \neq 0\} && (4.4)
\end{aligned}$$

Définissons, pour tout $(b,\widetilde{b}) \in \mathcal{E}_1$,

$$\mathfrak{p}_1(b,\widetilde{b}) := \{U \in \mathfrak{g} \mid [Z_{j_1}, U]_b \in < \widetilde{b} >\},$$

où $< \widetilde{b} >$ désigne l'espace vectoriel engendré par $\widetilde{b}_1, \dots \widetilde{b}_{m-1}$.

Pour définir la base de $\mathfrak{p}_1(b, \widetilde{b})$, il faut remarquer que

$$< Z_{j_1+1}, \dots, Z_n >= \mathbb{R}Z_b \oplus < \widetilde{b} >,$$

il existe pour chaque Z_i un unique $\alpha_i \in \mathbb{R}$ et un unique $v_i \in < \widetilde{b} >$ tels que

$$[Z_{j_1}, Z_i]_b = \alpha_i Z_b + v_i = \alpha_i [Z_{k_1}, Z_{j_1}]_b + v_i.$$

Notons que $\alpha_i = 0$ si $i > k_1$, et alors $[Z_{j_1}, Z_i]_b = 0$.

Définissons

$$Z_i^1(b, \widetilde{b}) = Z_i + \alpha_i Z_{k_1}, \quad \text{pour } i \neq k_1.$$

En particulier, $Z_i^1(b, \widetilde{b}) = Z_i$ si $i > k_1$. Il est facile alors de voir que $\mathfrak{p}_1(b, \widetilde{b})$ est un idéal de codimension un dans $\mathfrak{g}_b$.

Notons $[\cdot, \cdot]_{(b, \widetilde{b})}$ pour le crochet de Lie dans $\mathfrak{p}_1(b, \widetilde{b})$ (qui coincide bien sûr avec $[\cdot, \cdot]_b$). On a le résultat suivant :

Proposition 3.1. $\{Z_i^1(b, \widetilde{b}) \mid i \in I_1\}$ *est une base de Jordan-Hölder de* $\mathfrak{p}_1(b, \widetilde{b})$ *et les constantes de structure pour cette base dans* $\mathfrak{p}_1(b, \widetilde{b})$ *sont des fonctions rationnelles en* $b, \widetilde{b}$*, si* $(\mathfrak{g}, \mathcal{B})$ *est une algèbre de Lie rationnellement variable.*

Démonstration. Montrons d'abord que $Z_i^1(b, \widetilde{b}) \in \mathfrak{p}_1(b, \widetilde{b})$.

Cas 1. Si $i > k_1$,

on a alors $Z_i^1(b, \widetilde{b}) = Z_i$ et que $[Z_{j_1}, Z_i]_b = 0$ par définition de k_1.

Cas 2. Si $i < k_1$, alors

$$[Z_{j_1}, Z_i^1(b, \widetilde{b})]_b = [Z_{j_1}, Z_i]_b + \alpha_i [Z_{j_1}, Z_{k_1}]_b = v_i \in < \widetilde{b} >$$

et donc $Z_i^1(b, \widetilde{b}) \in \mathfrak{p}_1(b, \widetilde{b})$.

Par construction, les vecteurs $Z_i^1(b, \widetilde{b})$, $i \in I_1$, sont indépendants et alors ils forment une base de $\mathfrak{p}_1(b, \widetilde{b})$.

En effet $\mathfrak{p}_1(b, \widetilde{b})$ peut être au plus de dimension $n-1$ car $Z_{k_1} \notin \mathfrak{p}_1(b, \widetilde{b})$. D'où

$$\mathfrak{g}_b = \mathbb{R}Z_{k_1} \oplus \mathfrak{p}_1(b, \widetilde{b}) = \mathbb{R}X \oplus \mathfrak{p}_1(b, \widetilde{b}).$$

Calculons à présent les constantes de structure $\widetilde{a}_{ij}^k(b, \widetilde{b})$ pour la base $Z_i^1(b, \widetilde{b})$ dans $\mathfrak{p}_1(b, \widetilde{b})$.

Cas 3. Si $i, j > k_1$, alors

$$[Z_i^1(b,\widetilde{b}), Z_j^1(b,\widetilde{b})]_{(b,\widetilde{b})} = [Z_i, Z_j]_b = \sum_{k>\max\{i,j\}>k_1} a_{ij}^k(b) Z_k = \sum_{k>\max\{i,j\}>k_1} a_{ij}^k(b) Z_k^1(b,\widetilde{b}),$$

i.e., $\widetilde{a}_{ij}^k(b,\widetilde{b}) = a_{ij}^k(b)$ dans ce cas.

Cas 4. Si $i < k_1 < j$, alors

$$\begin{aligned}[Z_i^1(b,\widetilde{b}), Z_j^1(b,\widetilde{b})]_{(b,\widetilde{b})} &= [Z_i + \alpha_i Z_{k_1}, Z_j]_b \\ &= \sum_{k>j>k_1} a_{ij}^k(b) Z_k + \alpha_i \sum_{k>j>k_1} a_{k_1 j}^k(b) Z_k \\ &= \sum_{k>j>k_1} (a_{ij}^k(b) + \alpha_i a_{k_1 j}^k(b)) Z_k^1(b,\widetilde{b})\end{aligned}$$

et $\widetilde{a}_{ij}^k(b,\widetilde{b}) = a_{ij}^k(b) + \alpha_i a_{k_1 j}^k(b)$ si $k > j > k_1 > i$.

Les autres constantes de structure étant nulles, car $a_{rs}^t(b) = 0$ si $t \leq \max\{r, s\}$.

Cas 5. Si $i, j < k_1$, alors

$$\begin{aligned}[Z_i^1(b,\widetilde{b}), Z_j^1(b,\widetilde{b})]_{(b,\widetilde{b})} &= [Z_i, Z_j]_b + \alpha_i [Z_{k_1}, Z_j]_b + \alpha_j [Z_i, Z_{k_1}]_b \\ &= \sum_{k>\max\{i,j\}} a_{ij}^k(b) Z_k + \alpha_i \sum_{k>k_1} a_{k_1 j}^k(b) Z_k + \alpha_j \sum_{k>k_1} a_{i k_1}^k(b) Z_k \\ &= \sum_{\max\{i,j\}<k<k_1} a_{ij}^k(b)(Z_k^1(b,\widetilde{b}) - \alpha_k Z_{k_1}) + a_{ij}^{k_1}(b) Z_{k_1} + \sum_{k>k_1} a_{ij}^k(b) Z_k^1(b,\widetilde{b}) \\ &\quad + \alpha_i \sum_{k>k_1} a_{k_1 j}^k(b) Z_k^1(b,\widetilde{b}) + \alpha_j \sum_{k>k_1} a_{i k_1}^k(b) Z_k^1(b,\widetilde{b}) \\ &= \Big(a_{ij}^{k_1}(b) - \sum_{\max\{i,j\}<k<k_1} \alpha_k a_{ij}^k(b)\Big) Z_{k_1} + \sum_{\max\{i,j\}<k<k_1} a_{ij}^k(b) Z_k^1(b,\widetilde{b}) \\ &\quad + \sum_{k>k_1} \Big(a_{ij}^k(b) + \alpha_i a_{k_1 j}^k(b) + \alpha_j a_{i k_1}^k(b)\Big) Z_k^1(b,\widetilde{b}).\end{aligned}$$

Comme $(Z_i^1(b,\widetilde{b}))_{i\in I_1}$ est une base de l'idéal $\mathfrak{p}_1(b,\widetilde{b})$, le coefficient de Z_{k_1} dans ce calcul doit s'annuler et les nouvelles constantes de structure sont définies par

$$\widetilde{a}_{ij}^k(b,\widetilde{b}) = a_{ij}^k(b) \text{ si } \max\{i,j\} < k < k_1 \text{ et}$$

$$\widetilde{a}_{ij}^k(b,\widetilde{b}) \;=\; a_{ij}^k(b) + \alpha_i a_{k_1 j}^k(b) + \alpha_j a_{ik_1}^k(b) \text{ si } k > k_1.$$

Les autres constantes de structures étant nulles.

Ce qui prouve que $(Z_k^1(b,\widetilde{b}))_{k\in I_1}$ est une base de Jordan-Hölder pour $\mathfrak{p}_1(b,\widetilde{b})$.

Supposons que $(\mathfrak{g},\mathcal{B})$ est une algèbre de Lie rationnellement variable. Comme

$$\alpha_i = \frac{\det([Z_{j_1}, Z_i]_b, \widetilde{b}_1, \ldots, \widetilde{b}_{m-1})}{\det([Z_{k_1}, Z_{j_1}]_b, \widetilde{b}_1, \ldots, \widetilde{b}_{m-1})},$$

où α_i est une fonction rationnelle en $b,\widetilde{b}$. Donc les nouvelles constantes de structure $\widetilde{a}_{ij}^k(b,\widetilde{b})$ sont aussi des fonctions rationnelles en $b,\widetilde{b}$. La formule pour α_i montre que les constantes de structure dépendent uniquement de b et $< \widetilde{b} >$. $\square$

3.5 Bases coexponentielles

Comme dans [L-Z] ou [Lu-Mu], notons $X_1(b,l) = Z_{k_1}(b,l), \ldots, X_d(b,l) = Z_{k_d}(b,l)$.

Alors $X_1(b,l), \ldots, X_d(b,l)$ est une base coexponentielle à la polarisation $\mathfrak{p}_d(b,l) = \mathfrak{b}_{(b,l)}$ dans $\mathfrak{g}_b$.

Si $(b,l) \in \mathcal{D}_{gen}$, on a bien sûr $X_1(b,l) = Z_{k_1}, \ldots, X_d(b,l) = Z_{k_d}$, i.e., les vecteurs de base sont fixés.

3.6 De nouvelles structures variables

A l'origine, $< \widetilde{b} >$ est défini par $\ker(l_{|<Z_{j_1+1},\ldots,Z_n>})$. Aussi on veut considérer seulement les formes linéaires sur $\mathfrak{p}_1(b,\widetilde{b})$ qui annulent $< \widetilde{b} >$. Pour ce faire, on regarde le quotient par $< \widetilde{b} >$ et on obtient une nouvelle structure variable. Les détails de ces constructions sont les suivants :

Donnons-nous $\mathfrak{p}_1(b,\widetilde{b})$, la base $(Z_k^1(b,\widetilde{b}))_{k\in I_1}$ et les constantes de structure pour le crochet de Lie dans $\mathfrak{p}_1(b,\widetilde{b})$ par rapport à cette nouvelle base dépendant uniquement de b et $< \widetilde{b} >$.

On peut alors définir une nouvelle algèbre de Lie rationnellement variable $(\mathfrak{q}_1, \mathcal{E}_1)$ par

$$\mathfrak{q}_1(b,\widetilde{b}) := \mathfrak{p}_1(b,\widetilde{b}) / < \widetilde{b} >,$$

en prenant dans $\mathfrak{q}_1(b,\widetilde{b})$ la base de Jordan-Hölder

$$\{Z_k^1(b,\widetilde{b}) \bmod < \widetilde{b} > \ \mid k \in I_1, k \leq j_1\} \bigcup \{Z_b \bmod < \widetilde{b} >\}$$

et en identifiant cette base à l'aide d'une base fixe dans un espace vectoriel réel $\mathfrak{q}_1$ de dimension j_1. Alors la dépendance en b et $\widetilde{b}$ est entièrement contenue dans le crochet de Lie $[\cdot,\cdot]_{(b,\widetilde{b})}$ et $(\mathfrak{q}_1, \mathcal{E}_1)$ peut être considérée comme une algèbre de Lie rationnellement variable, dont le groupe de Lie variable associé est noté $(Q_1, \mathcal{E}_1)$.
De la même manière, on définit une algèbre de Lie rationnellement variable $(\mathfrak{r}_1, \mathcal{E}_1)$ par

$$\mathfrak{r}_1(b,\widetilde{b}) := \mathfrak{p}_1(b,\widetilde{b}) / < Z_{j_1}, \widetilde{b} >= \mathfrak{q}_1(b,\widetilde{b}) / < Z_{j_1} >,$$

en prenant dans $\mathfrak{r}_1(b,\widetilde{b})$ la base de Jordan-Hölder

$$\{Z_k^1(b,\widetilde{b}) \bmod < Z_{j_1}, \widetilde{b} > \ \mid k \in I_1, k < j_1\} \bigcup \{Z_b \bmod < Z_{j_1}, \widetilde{b} >\}.$$

Notons $\widetilde{Z}_k^1(b,\widetilde{b}) = Z_k^1(b,\widetilde{b}) \bmod < Z_{j_1}, \widetilde{b} >$ si $k \in I_1, k < j_1$
et $\widetilde{Z}_{j_1+1}^1(b,\widetilde{b}) = Z_b \bmod < Z_{j_1}, \widetilde{b} >$ pour cette base.
Faisons alors le même type d'identifications que précédemment et notons $(R_1, \mathcal{E}_1)$ pour le groupe de Lie variable associé.

Considérons la nouvelle structure variable $(\mathfrak{r}_1, \mathcal{E}_1)$. Toutes les constructions précédentes peuvent être bien sûr effectuées pour cette nouvelle structure.
Notons
$\widetilde{\mathcal{S}}$, $\widetilde{T}_{(b,\widetilde{b})}$, $\widetilde{T}$, $V_{\widetilde{T}_{(b,\widetilde{b})}}$, $V_{\widetilde{T}}$, $\widetilde{\mathcal{D}}_{\widetilde{T},gen}$, $\widetilde{j}_i(b,\widetilde{b},\widetilde{l})$, $\widetilde{k}_i(b,\widetilde{b},\widetilde{l})$, $\widetilde{j}_i(b,\widetilde{b})$, $\widetilde{k}_i(b,\widetilde{b})$, $\widetilde{j}_i$, $\widetilde{k}_i$, $\widetilde{\mathcal{D}}_i$, $\widetilde{I}_i$ pour $i \geq 2$ (comme $i = 1$ correspond à $\mathfrak{g}$) pour les objets correspondants à $(\mathfrak{r}_1, \mathcal{E}_1)$. Ici les indices sont définis par rapport à la base de Jordan-Hölder définie ci-dessus.
En particulier, $\widetilde{\mathcal{S}} = \bigcup\limits_{(b,\widetilde{b}) \in \mathcal{E}_1} \{(b,\widetilde{b})\} \times V_{\widetilde{T}_{(b,\widetilde{b})}}$.

Définition 3.3. Définissons l'application

$$\Phi : \widetilde{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}$$

par
$$\Phi(b,\widetilde{b},\widetilde{l}) = (b,l),$$
où $l \in \mathfrak{g}^*$ est donnée par

$$\begin{aligned} < l, U > &:= < \widetilde{l}, \widetilde{U} > \quad \forall U \in \mathfrak{p}_1(b,\widetilde{b}) \\ < l, X > &:= 0, \end{aligned}$$

avec $\widetilde{U} = U \bmod < Z_{j_1}, \widetilde{b} >$.

Dans ce contexte l est complètement déterminée et $< l, X >=< l, Y >= 0$, $l_{|<\widetilde{b}>} \equiv 0$.

Remarquons en particulier que cette forme linéaire l est nulle sur les vecteurs de bases correspondants aux indices de Pukanszky de $\mathfrak{g}_b$, i.e., $l \in V_{T_b}$ et donc $(b,l) \in \mathcal{S}$.

On obtient alors le lemme suivant :

Lemme 3.2. *L'application Φ est bien définie, injective et continue. Les familles d'indices j et k vérifient*
$$j_i = \widetilde{j}_i \text{ et } k_i = \widetilde{k}_i \quad \forall i \in \{2,\dots,d\}.$$
De plus,
$$\mathcal{D}_{T,gen} = \Phi(\widetilde{\mathcal{D}}_{\widetilde{T},gen}) \cap \mathcal{D}_1.$$

Démonstration. La continuité de Φ est claire, par définition.

Pour chaque $U \in \mathfrak{p}_1(b,\widetilde{b})$, notons $\widetilde{U}$ pour U mod $< Z_{j_1}, \widetilde{b} >\in \mathfrak{r}_1(b,\widetilde{b})$.

Montrons que $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{S} \subset \mathfrak{Im}\Phi$.

Pour ce faire, soit $(b,l) \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{S}$. D'où $< l, [Z_{k_1}, Z_{j_1}]_b >\neq 0$.

Choisissons une base $\widetilde{b}$ de $\ker(l_{|<Z_{j_1+1},\dots,Z_n>})$

et définissons $\widetilde{l} \in \mathfrak{r}_1(b,\widetilde{b})^* \equiv \mathfrak{r}_1^*$ par $< \widetilde{l}, \widetilde{U} >:=< l, U >$ pour tout $\widetilde{U} \in \mathfrak{r}_1(b,\widetilde{b})$.

Cet élément $\widetilde{l}$ est bien défini car $< l, Z_{j_1} >= 0$ ($l \in V_{T_b}$) et $l_{|<\widetilde{b}>} \equiv 0$ (d'après le choix de $\widetilde{b}$).

De plus, $(b,\widetilde{b},\widetilde{l}) \in \widetilde{\mathcal{S}}$ comme les indices de saut au sens de Pukanszky de $\widetilde{l}$ dans $\mathfrak{r}_1(b,\widetilde{b})$ coincident avec les indices de saut de Pukanszky de l dans $\mathfrak{g}_b$ qui sont plus petits que j_1 et différents de k_1 et j_1. D'après le choix de l et $\widetilde{b}$, $Z_b = [Z_{k_1}, Z_{j_1}]_b \notin< \widetilde{b} >$ et $(b,\widetilde{b}) \in \mathcal{E}_1$. Donc $(b,\widetilde{b},\widetilde{l}) \in \widetilde{\mathcal{S}}$ et $\Phi(b,\widetilde{b},\widetilde{l}) = (b,l)$ par construction.

D'où $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{S} \subset \mathfrak{Im}\Phi$.

Remarquons que $\widetilde{\mathcal{D}}_{\widetilde{T},gen} \cap \Phi^{-1}(\mathcal{D}_{T,gen}) \neq \emptyset$.

En effet, $\mathcal{D}_{T,gen}$ est un ouvert non vide de $\mathcal{S}$ contenu dans $\mathfrak{Im}\Phi$,

car $\mathcal{D}_{T,gen} \subset \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{S} \subset \mathfrak{Im}\Phi$.

Par continuité de Φ, $\Phi^{-1}(\mathcal{D}_{T,gen})$ est un ouvert non vide de $\widetilde{\mathcal{S}}$. De plus, $\widetilde{\mathcal{D}}_{\widetilde{T},gen}$ est un ouvert de Zariski de $\widetilde{\mathcal{S}}$.

Donc $\widetilde{\mathcal{D}}_{\widetilde{T},gen} \cap \Phi^{-1}(\mathcal{D}_{T,gen}) \neq \emptyset$.

On voit que $\widetilde{j}_2(b,\widetilde{b},\widetilde{l}) = j_2(\Phi(b,\widetilde{b},\widetilde{l})) = j_2(b,l)$, $\widetilde{j}_2(b,\widetilde{b}) = j_2(b)$, $\widetilde{j}_2 = j_2$, pour chaque $(b,\widetilde{b},\widetilde{l}) \in \widetilde{\mathcal{S}}$.

En effet, le passage de $\mathfrak{p}_1(b,\widetilde{b})$ à $\mathfrak{r}_1(b,\widetilde{b})$ est obtenu en prenant le quotient avec le sous-espace du centre de $\mathfrak{p}_1(b,\widetilde{b})$. Ceci n'affecte pas la définition de ces indices.

Montrons maintenant que $k_2 = \widetilde{k}_2$.

Pour ce faire, soient $(b,\widetilde{b},\widetilde{l}) \in \widetilde{\mathcal{D}}_{\widetilde{T},gen} \cap \Phi^{-1}(\mathcal{D}_{Tgen})$ et $(b,l) = \Phi(b,\widetilde{b},\widetilde{l})$. Alors

$$< \widetilde{l}, [\widetilde{Z}^1_{j_2}(b,\widetilde{b}), \widetilde{Z}^1_{\widetilde{k}_2}(b,\widetilde{b})]_{(b,\widetilde{b})} >\neq 0$$

(comme $j_2 = \widetilde{j}_2 = \widetilde{j}_2(b,\widetilde{b},\widetilde{l})$, $\widetilde{k}_2 = \widetilde{k}_2(b,\widetilde{b},\widetilde{l})$) et donc

$$< l, [Z^1_{j_2}(b,l), Z^1_{\widetilde{k}_2}(b,l)]_b >\neq 0,$$

avec $(b,l) \in \mathcal{D}_{T,gen}$. D'où $\widetilde{k}_2 \leq k_2(b,l) = k_2$.

Réciproquement, comme $(b,l) \in \mathcal{D}_{T,gen}$ et $(b,l) = \Phi(b,\widetilde{b},\widetilde{l})$,

$$< l, [Z^1_{j_2}(b,l), Z^1_{k_2}(b,l)]_b >\neq 0,$$

ce qui implique que

$$< \widetilde{l}, [\widetilde{Z}^1_{j_2}(b,\widetilde{b}), \widetilde{Z}^1_{k_2}(b,\widetilde{b})]_{(b,\widetilde{b})} >\neq 0,$$

(avec $j_2 = \widetilde{j}_2 = \widetilde{j}_2(b,\widetilde{b},\widetilde{l})$) par définition de l.

Donc $k_2 \leq \widetilde{k}_2(b,\widetilde{b},\widetilde{l}) = \widetilde{k}_2$ comme $(b,\widetilde{b},l) \in \widetilde{\mathcal{D}}_{\widetilde{T},gen}$. D'où $\widetilde{k}_2 = k_2$.

Posons $\widetilde{\mathcal{D}}_2 = \{(b,\widetilde{b},\widetilde{l}) \in \mathcal{E}_1 \times \mathfrak{r}_1^* \mid (b,l) \in \mathcal{D}_1,\ \widetilde{j}_2(b,\widetilde{b},\widetilde{l}) = \widetilde{j}_2 = j_2$ et $\widetilde{k}_2(b,\widetilde{b},\widetilde{l}) = \widetilde{k}_2 = k_2\}$. Alors $\Phi(\widetilde{\mathcal{D}}_2 \cap \widetilde{\mathcal{S}}) = \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{S}$.

En effet, remarquons tout d'abord que $\mathcal{D}_2 \cap \mathcal{S} \subset \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{S} \subset \mathfrak{Im}\Phi$.

On a ainsi $(b,l) = \Phi(b,\widetilde{b},\widetilde{l})$ avec $(b,l) \in \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{S}$.

En particulier

$$< l, [Z^1_{k_2}(b,\widetilde{b}), Z^1_{j_2}(b,\widetilde{b})]_b > \neq 0$$

comme $j_2(b,l) = j_2$ et $k_2(b,l) = k_2$.

D'après la définition de Φ,

$$< \widetilde{l}, [\widetilde{Z}^1_{k_2}(b,\widetilde{b}), \widetilde{Z}^1_{j_2}(b,\widetilde{b})]_{(b,\widetilde{b})} > \neq 0.$$

Ce qui montre tout d'abord que $\widetilde{Z}^1_{j_2}(b,\widetilde{b}) \notin \mathfrak{r}_1(b,\widetilde{b})(\widetilde{l})$, le stabilisateur de $\widetilde{l}$ dans $r_1(b,\widetilde{b})$, et ainsi $\widetilde{j}_2 = j_2 \leq \widetilde{j}_2(b,\widetilde{b},\widetilde{l})$. Comme on a toujours $\widetilde{j}_2(b,\widetilde{b},\widetilde{l}) \leq \widetilde{j}_2$, on obtient en effet $\widetilde{j}_2(b,\widetilde{b},\widetilde{l}) = \widetilde{j}_2$.

Mais on doit alors avoir $\widetilde{k}_2 = k_2 \leq \widetilde{k}_2(b,\widetilde{b},\widetilde{l})$. Comme l'inégalité inverse est toujours vraie, on obtient $\widetilde{k}_2(b,\widetilde{b},\widetilde{l}) = \widetilde{k}_2$ et $(b,\widetilde{b},\widetilde{l}) \in \widetilde{\mathcal{D}}_2$.

D'après $\mathcal{D}_2 \cap \mathcal{S} \subset \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{S} \subset \mathfrak{Im}\Phi$, ceci montre que $\mathcal{D}_2 \cap \mathcal{S} \subset \Phi(\widetilde{\mathcal{D}}_2 \cap \widetilde{\mathcal{S}})$. L'inclusion inverse se montre de la même manière.

Procédons maintenant par récurrence.

Supposons que $\widetilde{j}_s = j_s$ et $\widetilde{k}_s = k_s$ pour $s \leq i-1$, $\Phi(\widetilde{\mathcal{D}}_{i-1} \cap \widetilde{\mathcal{S}}) = \mathcal{D}_{i-1} \cap \mathcal{S}$ ($\widetilde{\mathcal{D}}_{i-1}$ étant défini de la même façon que $\widetilde{\mathcal{D}}_2$) et prouvons les mêmes relations pour tout i.

De même que dans le cas $i = 2$, on voit que

$\widetilde{j}_i(b,\widetilde{b},\widetilde{l}) = j_i(\Phi(b,\widetilde{b},\widetilde{l})) = j_i(b,l)$, $\widetilde{j}_i(b,\widetilde{b}) = j_i(b)$ et $\widetilde{j}_i = j_i$ pour chaque $(b,\widetilde{b},\widetilde{l}) \in \widetilde{\mathcal{D}}_{i-1}$. Le même argument que dans le cas $i = 2$ montre que $\widetilde{k}_i = k_i$.

Donc, si $\widetilde{\mathcal{D}}_i = \{(b,\widetilde{b},\widetilde{l}) \in \widetilde{\mathcal{D}}_{i-1} \mid \widetilde{j}_i(b,\widetilde{b},\widetilde{l}) = \widetilde{j}_i = j_i \text{ et } \widetilde{k}_i(b,\widetilde{b},\widetilde{l}) = \widetilde{k}_i = k_i\}$, alors $\Phi(\widetilde{\mathcal{D}}_i \cap \widetilde{\mathcal{S}}) = \mathcal{D}_i \cap \mathcal{S}$. Pour $i = d$ la procédure s'arrête et on obtient le résultat voulu.

□

3.7 Les bons espaces de fonctions

Soit $(G, \mathcal{B})$ un groupe de Lie rationnellement variable muni de sa base fixe $\{Z_1, \dots, Z_n\}$.

Une fonction h sur G_b est identifiée à une fonction sur $\mathbb{R}^n$ par la formule

$$h(x_1, \dots, x_n) = h(\exp_b(x_1 Z_1) \cdot_b \cdots \cdot_b \exp_b(x_n Z_n)).$$

Définition 3.4. Soit $r \in \mathbb{N}$. On définit $\mathcal{S}(G, \mathcal{B}, \mathbb{R}^r)$ l'ensemble des fonctions

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{B} \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{C} \\ (b, \alpha, (x_1, \ldots, x_n)) & \mapsto & f(b, \alpha, \exp_b(x_1 Z_1) \cdot_b \cdots \cdot_b \exp_b(x_n Z_n)) \end{array}$$

qui sont $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à toutes les variables et telles que

$$\begin{aligned} &\|f\|_{K,A,B_1,B_2,C_1,C_2} \\ &\quad = \sup_{b \in K; \alpha \in \mathbb{R}^r; x \in \mathbb{R}^n} \Big[\sup_{|a| \le A; |r_i| \le B_i; |s_j| \le C_j; i,j \in \{1,2\}} |\alpha^{r_1} x^{s_1} \\ &\qquad \cdot \frac{\partial^a}{\partial b^a} \frac{\partial^{r_2}}{\partial \alpha^{r_2}} \frac{\partial^{s_2}}{\partial x^{s_2}} f(b, \alpha, \exp_b(x_1 Z_1) \cdot_b \cdots \cdot_b \exp_b(x_n Z_n))| \Big] \\ &\quad < +\infty \end{aligned}$$

où K désigne un compact arbitraire de $\mathcal{B}$ et $A, B_i, C_j \in \mathbb{N}$.

Soit $\mathcal{B} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} K_m$, les ensembles K_m étant des compacts. Si K parcourt les ensembles K_m et A, B_i, C_j l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$, alors on obtient une famille dénombrable de semi-normes qui définit la topologie de $\mathcal{S}(G, \mathcal{B}, \mathbb{R}^r)$, qui devient ainsi un espace de Fréchet.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de Zariski dans $\mathcal{D}_{T,gen}$.

Alors $\mathcal{U}$ est disjoint de $\mathcal{B} \times \{0\}$, car $(b, 0)$ n'appartient jamais à $\mathcal{D}_{T,gen}$.

Pour chaque forme linéaire $l \in V_{T_b}$, soit $\mathfrak{b}_{(b,l)}$ la polarisation de Vergne en l dans $\mathfrak{g}_b$ par rapport à la base donnée.

On sait que $\mathfrak{b}_{(b,l)} = \mathfrak{p}_d(b, l)$ si $(b, l) \in \mathcal{D}_{T,gen}$, voir la section 3.3.5. Soit $\chi_{(b,l)}$ le caractère unitaire défini sur $B_{(b,l)} = \exp_b \mathfrak{b}_{(b,l)}$ par la formule $\chi_{(b,l)}(u) = e^{-2\pi i < l, \log_b u >}$.

Soit $X_1(b, l) = Z_{k_1}, \ldots, X_d(b, l) = Z_{k_d}$ la base coexponentielle de $\mathfrak{g}_b$ par rapport à $\mathfrak{b}_{(b,l)}$. Grâce à cette base, $G_b / B_{(b,l)}$ peut être identifiée à $\mathbb{R}^d$.

Définition 3.5. Soit $r \in \mathbb{N}$. L'**espace des noyaux** $\mathcal{N}(G, \mathcal{U}, \mathbb{R}^r)$ est défini comme l'ensemble de toutes les fonctions $\mathcal{C}^\infty$

$$F : \mathcal{B} \times V_T \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$$

qui vérifient les deux conditions suivantes :

(i)

$$F(b,l,\cdot,\cdot,\cdot) \equiv 0 \text{ si } (b,l) \notin \mathcal{U},$$

donc en particulier si $(b,l) \notin \mathcal{D}_{T,gen}$.

(ii)

$$\begin{aligned}
&\|F\|_{K,A,C,D_1,D_2,E_1,E_2,F_1,F_2} \\
&\quad = \sup_{(b,l)\in K;\alpha\in\mathbb{R}^r;x,y\in\mathbb{R}^d} \Big[\sup_{|a|\le A;|c|\le C;|d_1|\le D_1;|d_2|\le D_2;|e_1|\le E_1;|e_2|\le E_2;|f_1|\le F_1;|f_2|\le F_2} |\alpha^{d_1}x^{e_1}y^{f_1} \\
&\qquad\qquad \cdot \frac{\partial^a}{\partial b^a}\frac{\partial^c}{\partial l^c}\frac{\partial^{d_2}}{\partial \alpha^{d_2}}\frac{\partial^{e_2}}{\partial x^{e_2}}\frac{\partial^{f_2}}{\partial y^{f_2}} F(b,l,\alpha,x,y)|\Big] \\
&\quad < +\infty
\end{aligned}$$

où K est un compact de $\mathcal{U}$ et $A, C, D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2 \in \mathbb{N}$.

Soit $\mathcal{U} = \bigcup_{s\in\mathbb{N}} K_s$, les ensembles K_s étant des compacts dans $\mathcal{U}$. Si K parcourt les ensembles K_s et $A, C, D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2$ parcourent les entiers $\mathbb{N}$, alors on obtient une famille dénombrable de semi-normes qui définissent la topologie de $\mathcal{N}(G,\mathcal{U},\mathbb{R}^r)$ et qui confèrent à $\mathcal{N}(G,\mathcal{U},\mathbb{R}^r)$ une structure d'espace de Fréchet.

Finalement, considérons la définition suivante

Définition 3.6. Soit $\mathcal{N}_c(G,\mathcal{U},\mathbb{R}^r)$ le sous-espace de $\mathcal{N}(G;\mathcal{U},\mathbb{R}^r)$ formé par les fonctions F qui vérifient les deux conditions suivantes :

(iii) Pour chaque $b \in \mathcal{B}_1$ (i.e. $(b,l) \in \mathcal{D}_{T,gen}$ pour au moins une forme linéaire l), il existe un compact $K(b)$ dans V_T tel que $\{b\} \times K(b) \subset \mathcal{D}_{T,gen}$ et $F(b,l,\cdot,\cdot,\cdot) \equiv 0$ si $l \notin K(b)$.

En particulier, $0 \notin K(b)$ car $(b,0) \notin \mathcal{D}_{T,gen}$.

(iv) Pour chaque $(b_0,l_0) \in (\mathcal{B}_1 \times V_T) \setminus \mathcal{D}_{T,gen}$, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}_{(b_0,l_0)}$ de (b_0,l_0) dans $\mathcal{B}_1 \times V_T$ tel que $F(b,l,\cdot,\cdot,\cdot) \equiv 0$ pour tout $(b,l) \in \mathcal{V}_{(b_0,l_0)}$.

L'espace $\mathcal{N}_c(G,\mathcal{U},\mathbb{R}^r)$ n'est plus un espace de Fréchet pour les semi-normes données.

Remarques. 1. $F(b,l,\alpha,\cdot,\cdot)$ peut être vue comme une fonction sur $G_b/B_{(b,l)} \times G_b/B_{(b,l)}$ en écrivant

$$\begin{aligned}
F(b,l,\alpha,x,y) &= F(b,l,\alpha,\exp_b(x_1X_1(b,l)) \cdot_b \cdots \cdot_b \exp_b(x_dX_d(b,l)), \\
&\qquad \exp_b(y_1X_1(b,l)) \cdot_b \cdots \cdot_b \exp_b(y_dX_d(b,l)))
\end{aligned}$$

ou même comme une fonction sur $G_b \times G_b$ si on introduit la relation de covariance

$$F(b,l,\alpha,x\cdot h,y\cdot h') = \overline{\chi_{(b,l)}(h)}\chi_{(b,l)}(h')F(b,l,\alpha,x,y) \quad \forall x,y\in G_b, \forall h,h'\in B_{(b,l)}.$$

2. On peut étendre F en une fonction en l définie sur l'orbite coadjointe entière passant par l en posant

$$F(b,(Ad^*g)(l),\alpha,x,y) = F(b,l,\alpha,x\cdot g,y\cdot g) \quad \forall g,x,y\in G_b.$$

(voir la formule (5.11) du chapitre 1)

Dans ce chapitre, on notera F une fonction ayant les précédentes propriétés.

3. Si $\mathcal{B}$ est réduit à un point, i.e., si on oublie la structure variable, $\mathcal{D}_{gen}\equiv\mathfrak{g}^*_{gen}$ et, si $\mathcal{U}$ est un ouvert de Zariski de $\mathfrak{g}^*_{gen}\cap V_T$, on définit de la même manière l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(G,\mathbb{R}^r)$, $\mathcal{N}(G,\mathcal{U},\mathbb{R}^r)$ et $\mathcal{N}_c(G,\mathcal{U},\mathbb{R}^r)$, en utilisant les semi-normes correspondantes pour définir leur topologie respective.

3.8 Le théorème d'inversion de Fourier

Prouvons d'abord un théorème d'inversion de Fourier variable :

Théorème 3.2. *Soit $(G,\mathcal{B})$ un groupe de Lie rationnellement variable muni de la base de Jordan-Hölder fixe $Z_1,\dots,Z_n$. Notons $\mathcal{B}_1 := \{b\in\mathcal{B}\mid \exists l\in\mathfrak{g}^* \text{ tel que } (b,l)\in\mathcal{D}_{T,gen}\}$. Alors pour chaque $r\in\mathbb{N}$ et chaque $F\in\mathcal{N}_c(G;\mathcal{D}_{T,gen},\mathbb{R}^r)$, il existe une unique fonction $f\in\mathcal{S}(G,\mathcal{B}_1,\mathbb{R}^r)$ vérifiant :*

Pour tout $(b,l)\in\mathcal{D}_{T,gen}$, l'opérateur $\pi_{(b,l)}(f_b(\alpha)(\cdot))$ admet $F(b,l,\alpha,\cdot,\cdot)$ comme noyau (si on note $f_b(\alpha)(\cdot)$ pour $f(b,\alpha,\cdot)$), provenant des polarisations et des bases coexponentielles correspondantes.

L'application $F\mapsto f$ est continue par rapport aux topologies données.

Ce théorème permet d'affirmer le résultat suivant, obtenu si $\mathcal{B}$ est réduit à un point, i.e., si on n'a pas affaire aux structures variables, mais à un groupe de Lie nilpotent.

Théorème 3.3. *Soit G un groupe de Lie nilpotent connexe, simplement connexe muni d'une base de Jordan-Hölder fixe. Il existe un ouvert de Zariski $\mathfrak{g}^*_{gen}$ de $\mathfrak{g}^*$ tel que pour chaque fonction $F\in\mathcal{N}_c(G,\mathfrak{g}^*_{gen})$ il existe une unique fonction $f\in\mathcal{S}(G)$ vérifiant :*

Pour chaque $l \in \mathfrak{g}^*_{gen}$, l'opérateur $\pi_l(f)$ admet $F(l,\cdot,\cdot)$ comme noyau, la polarisation en l étant la polarisation de Vergne par rapport à la base donnée et la base coexponentielle étant choisie comme dans les sections précédentes.

L'application $F \mapsto f$ est continue par rapport aux topologies données.

La preuve de ce résultat sera donnée dans la section 3.8.2.

3.8.1 Résultats sur la tranformée de Radon

Dans cette section, nous rappelons quelques résultats sur la transformée de Radon (voir [He]), qui permet de reconstruire une fonction f, si on connaît chacune de ses intégrales sur tout hyperplan de l'espace sur laquelle elle est définie. Pour les preuves, consulter [He].

Soit f une fonction sur $\mathbb{R}^m$, intégrable sur chaque hyperplan de $\mathbb{R}^m$. Soit $\mathbf{P}^m$ l'espace de tous les hyperplans de $\mathbb{R}^m$. Soient $\xi \in \mathbf{P}^m$ et $d\mu$ la mesure euclidienne ξ. Définissons alors :

Définition 3.7. La **transformée de Radon $\mathcal{R}f$ de f en ξ** est définie par

$$\mathcal{R}f(\xi) := \int_\xi f(x)d\mu(x).$$

Paramétrisons à présent les hyperplans de $\mathbb{R}^m$ de la manière suivante :

$$\xi(\omega, r) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \ < x, \omega >= r\}$$

où $r \in \mathbb{R}$ et ω est un vecteur normal à ξ.

Remarquons que (ω, r) et $(-\omega, -r)$ caractérisent le même hyperplan ξ. On écrira donc

$$\mathcal{R}f(\xi) = \mathcal{R}f(\omega, r) = \int_{<x,\omega>=r} f(x)d\mu(x)$$

et on a $\mathcal{R}f(\omega, r) = \mathcal{R}f(-\omega, -r)$, avec $(\omega, r) \in \mathbf{S}^{m-1} \times \mathbb{R}$, $\mathbf{S}^{m-1}$ étant la sphère unité dans $\mathbb{R}^m$.

On doit aussi considérer l'espace de Schwartz suivant :

Définition 3.8. L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{P}^m)$ sur l'espace des hyperplans est défini par

$$\mathcal{S}(\mathbf{P}^m) := \Big\{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{S}^{m-1} \times \mathbb{R}) \mid \varphi(\omega, r) = \varphi(-\omega, -r), \forall(\omega, r) \in \mathbf{S}^{m-1} \times \mathbb{R}\Big\},$$

avec $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{S}^{m-1} \times \mathbb{R})$ si et seulement si φ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ telle que

$$\sup_{(\omega,r)\in\mathbf{S}^{m-1}\times\mathbb{R}} |(1 + |r|^k)\frac{d^l}{dr^l}(D\varphi)(\omega, r)| < +\infty$$

pour tous $k, l \in \mathbb{N}$, pour tout opérateur différentiel D sur $\mathbf{S}^{m-1}$.

La transformée de Radon envoie $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ sur $\mathcal{S}(\mathbf{P}^m)$. On aimerait que la transformée de Radon soit une bijection entre les espaces $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ et $\mathcal{S}(\mathbf{P}^m)$. Malheureusement, ce n'est pas le cas. Néanmoins, on obtient une bijection si l'on se restreint à certains sous-espaces de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ et $\mathcal{S}(\mathbf{P}^m)$ définis de le manière suivante :

Définitions 3.1. 1. Soit $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^m)$ l'espace des fonctions $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ telles que

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(x)P(x)dx = 0 \quad \text{pour tout polynôme } P.$$

2. De même, soit $\mathcal{S}^*(\mathbf{P}^m)$ l'espace des fonctions $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{P}^m)$ telles que

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(\omega, r)p(r)dr = 0 \quad \text{pour tout polynôme } p \text{ sur } \mathbb{R}, \forall\omega \in \mathbf{S}^{m-1}.$$

On obtient le résultat suivant, prouvé dans [He] :

Théorème 3.4. *La transformée de Radon est une bijection de $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^m)$ sur $\mathcal{S}^*(\mathbf{P}^m)$.*

Le théorème précédent affirme que pour chaque $\varphi \in \mathcal{S}^*(\mathbf{P}^m)$, il existe une unique fonction $f \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^m)$ telle que $\varphi = \mathcal{R}f$. De plus, f peut être obtenue à partir de φ par une formule d'inversion(voir [He]) :

$$f(x) \;=\; \int_{\mathbf{S}^{m-1}} \Big[\int_0^{+\infty} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi isr}\mathcal{R}f(\omega, r)dr\Big)e^{2\pi is<x,\omega>}s^{m-1}ds\Big]d\omega$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbf{S}^{m-1}} \Big[\int_0^{+\infty} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i s r} \varphi(\omega, r) dr \Big) e^{2\pi i s <x,\omega>} s^{m-1} ds \Big] d\omega \\
&= \int_{\mathbf{S}^{m-1}} \Big[\int_0^{+\infty} \widehat{\varphi}^2(\omega, s) s^{m-1} e^{2\pi i s <x,\omega>} ds \Big] d\omega
\end{aligned}
$$

où $\widehat{\varphi}^2$ désigne la transformée de Fourier partielle en la deuxième variable. Mais, comme $\varphi \in \mathcal{S}^*(\mathbf{P}^m)$, $\widehat{\varphi}^2$ et toutes ses dérivées partielles par rapport à la seconde variable sont nulles en $s = 0$. Donc la fonction ψ définie par

$$
\psi(\omega, s) = \begin{cases} s^{n-1} \widehat{\varphi}^2(\omega, s) & \text{si } s \geq 0 \\ 0 & \text{si } s < 0 \end{cases}
$$

est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ et appartient à $\mathcal{S}(\mathbf{S}^{m-1} \times \mathbb{R})$.

Finalement

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_{\mathbf{S}^{m-1}} \Big[\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\omega, s) e^{2\pi i s <x,\omega>} ds \Big] d\omega \\
&= \int_{\mathbf{S}^{m-1}} \widehat{\psi}^2(\omega, - < x, \omega >) d\omega
\end{aligned}
$$

où $\widehat{\psi}^2 \in \mathcal{S}(\mathbf{S}^{m-1} \times \mathbb{R})$.

3.8.2 Preuve du théorème d'inversion de Fourier

Nous allons faire une récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$.

Cas 1. Supposons que $\dim \mathfrak{g} = 1$**.**

Alors $\mathfrak{g}_b \equiv \mathbb{R}$ pour tout b et il n'existe pas de structure variable. Le résultat est obtenu par le théorème d'inversion de Fourier classique.

Cas 2. Supposons que $\dim \mathfrak{g} = n > 1$**.**

Dans le reste de cette section, on écrira $x \cdot y$ pour le produit dans G_b à la place de $x \cdot_b y$. On utilisera la construction et les définitions précédemment introduites. Considérons en particulier la nouvelle algèbre de Lie rationnellement variable $(\mathfrak{r}_1, \mathcal{E}_1)$.

Rappelons que l'on a posé $X = Z_{k_1}, Y = Z_{j_1}$ (et ceci pour tout b d'après le choix de $\mathcal{D}_{gen}$) et $Z_b = [X, Y]_b$. Considérons la fonction $\Phi : \widetilde{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}$ posée dans la définition 3.3 et rappelons que $\mathcal{D}_{T,gen} = \Phi(\widetilde{\mathcal{D}}_{\widetilde{T},gen}) \cap \mathcal{D}_1$.

Soit $F \in \mathcal{N}_c(G, \mathcal{D}_{T,gen}, \mathbb{R}^r)$ et définissons $\dot{\widetilde{F}} \in \mathcal{N}_c(R_1, \widetilde{\mathcal{D}}_{\widetilde{T},gen}, \mathbb{R}^{r+2})$ par

$$\dot{\widetilde{F}}(b, \widetilde{b}, \widetilde{l}; s, t, \alpha; \dot{g}_1, \dot{g}_1') = | < l, [X, Y]_b > | \cdot F(b, l; \alpha; \exp_b((s + t)X) \cdot g_1, \exp_b(tX) \cdot g_1'),$$

pour $(b, \widetilde{b}, \widetilde{l}) \in \mathcal{E}_1 \times \mathfrak{r}_1^*, s, t \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}^r, \dot{g}_1, \dot{g}_1' \in R_1(b, \widetilde{b})$, où $(b, l) = \Phi(b, \widetilde{b}, \widetilde{l})$.

En particulier, $\dot{\widetilde{F}}(b, \widetilde{b}, \widetilde{l}, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot) \equiv 0$ si $(b, \widetilde{b}, \widetilde{l}) \notin \widetilde{\mathcal{D}}_{\widetilde{T},gen}$, comme, dans ce cas, $(b, l) \notin \mathcal{D}_{T,gen}$ et donc $F(b, l, \cdot, \cdot, \cdot) \equiv 0$.

Cette fonction est bien définie, car $l_{|<Y,\widetilde{b}>} \equiv 0$ et $< Y, \widetilde{b} >$ est contenu dans le centre de $\mathfrak{p}_1(b, \widetilde{b})$ et donc dans la polarisation $\mathfrak{p}_d(b, \widetilde{b})$. Elle possède la même relation de covariance que F et est $\mathcal{C}^\infty$. Elle est bornée, comme F pour les semi-normes appropriées.

Pour chaque $(b, \widetilde{b})$ tel que $(b, \widetilde{b}, \widetilde{l}) \in \widetilde{\mathcal{D}}_{\widetilde{T},gen}$ pour au moins une forme linéaire $\widetilde{l}$, il existe un compact $K(b, \widetilde{b})$ dans $V_{\widetilde{T}_{(b,\widetilde{b})}} = V_{\widetilde{T}}$ (la section des orbites dans $\mathfrak{r}_1(b, \widetilde{b})^*$) tel que $0 \notin K(b, \widetilde{b})$ et $\dot{\widetilde{F}}(b, \widetilde{b}, \widetilde{l}; \cdot, \cdot, \cdot; \cdot, \cdot) \equiv 0$ si $\widetilde{l} \notin K(b, \widetilde{b})$.

En effet, soient $K(b)$ le compact de $V_{T_b} = V_T$ introduit dans la définition 3.6

et $L_{(b,\widetilde{b})} = \{l \in V_T \mid l_{|<\widetilde{b}>} \equiv 0\}$, qui est un fermé de V_T.

Donc $A(b, \widetilde{b}) = K(b) \cap L_{(b,\widetilde{b})}$ est un compact de V_T et $L(b, \widetilde{b})$. De plus l'application

$$\begin{array}{rcl} L_{(b,\widetilde{b})} & \to & V_{\widetilde{T}_{(b,\widetilde{b})}} = V_{\widetilde{T}} \\ l & \mapsto & \widetilde{l} \end{array}$$

définie par $\widetilde{l}(\widetilde{u}) = l(u)$ pour chaque $u \in \mathfrak{p}_1(b, \widetilde{b})$ tel que $\widetilde{u} = u \bmod < Y, \widetilde{b} >$ est une bijection continue de $L_{(b,\widetilde{b})}$ sur $V_{\widetilde{T}}$.

Soit $K(b, \widetilde{b})$ l'image de $A(b, \widetilde{b})$ par cette application. Donc $K(b, \widetilde{b})$ est un compact de $V_{\widetilde{T}}$ tel que $0 \notin K(b, \widetilde{b})$. Par construction, $\widetilde{l} \in V_{\widetilde{T}} \setminus K(b, \widetilde{b})$ implique que $l \in V_T \setminus K(b)$ et alors que $F(b, l; \cdot; \cdot, \cdot) \equiv 0$ et $\dot{\widetilde{F}}(b, \widetilde{b}, \widetilde{l}; \cdot, \cdot, \cdot; \cdot, \cdot) \equiv 0$. Ce qui prouve la condition (iii) de la définition 3.6.

Pour prouver (iv), prenons $(b_0, \widetilde{b}_0, \widetilde{l}_0) \in (\mathcal{E}_1 \times V_{\widetilde{T}}) \setminus \widetilde{\mathcal{D}}_{\widetilde{T},gen}$.

Soit $(b_0, l_0) = \Phi(b_0, \widetilde{b}_0, \widetilde{l}_0)$. D'après le lemme 3.2, $(b_0, l_0) \notin \mathcal{D}_{T,gen}$.

Donc, par la propriété (iv) de la définition 3.6, il existe $\mathcal{V}_{(b_0,l_0)}$, voisinage ouvert de (b_0, l_0) dans $\mathcal{B} \times V_T$ tel que $F(b, l, \cdot, \cdot, \cdot) \equiv 0$ pour chaque $(b, l) \in \mathcal{V}_{(b_0,l_0)}$. D'où $\Phi^{-1}(\mathcal{V}_{(b_0,l_0)})$ est un voisinage ouvert de (b_0, l_0) dans $\mathcal{E}_1 \times V_{\widetilde{T}}$.

Soit $(b, \widetilde{b}, \widetilde{l}) \in \Phi^{-1}(\mathcal{V}_{(b_0,l_0)})$ et posons $(b, l) = \Phi(b, \widetilde{b}, \widetilde{l})$.

Alors $(b, l) \in \mathcal{V}_{(b_0,l_0)}$ et $F(b, l, \cdot, \cdot, \cdot) \equiv 0$.

Mais, par définition de $\dot{\widetilde{F}}$, $\dot{\widetilde{F}}(b, \widetilde{b}, \widetilde{l}, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot) \equiv 0$.

Ainsi la fonction $\dot{\widetilde{F}}$ satisfait les hypothèses du théorème 3.2.

Notons $\dot{\widetilde{\pi}}_{(b,\widetilde{b},\widetilde{l})}$ la représentation irréductible unitaire de R_1 associée à $\mathfrak{r}_1^*$, la polarisation $\mathfrak{b}_{(b,\widetilde{b},\widetilde{l})}$ de $\widetilde{l}$ dans $\mathfrak{r}_1$ étant donnée par

$$\mathfrak{b}_{(b,\widetilde{b},\widetilde{l})} = \mathfrak{b}_{(b,l)} \bmod < Y, \widetilde{b} >= \mathfrak{p}_d(b, l) \bmod < Y, \widetilde{b} >,$$

où $\mathfrak{b}_{(b,l)} = \mathfrak{p}_d(b, l)$ est la polarisation de Vergne en l dans $\mathfrak{g}$. Alors $\mathfrak{b}_{(b,\widetilde{b},\widetilde{l})}$ est la polarisation de Vergne en $\widetilde{l}$ dans $\mathfrak{r}_1$ par rapport à la la base donnée. Par hypothèse de récurrence, il existe $f_0 \in \mathcal{S}(R_1, \mathcal{E}_1, \mathbb{R}^{r+2})$ tel que l'opérateur $\dot{\widetilde{\pi}}_{(b,\widetilde{b},\widetilde{l})}(f_0(b, \widetilde{b}, s, t, \alpha, \cdot))$ admette $\dot{\widetilde{F}}(b, \widetilde{b}, \widetilde{l}; s, t, \alpha; \cdot, \cdot)$ comme noyau par chaque $(b, \widetilde{b}, \widetilde{l}) \in \widetilde{\mathcal{D}}_{\widetilde{T},gen}$.

En particulier, pour chaque $(b, \widetilde{b})$ fixé, $f_0(b, \widetilde{b}, s, t, \alpha, \cdot) \in \mathcal{S}(P_1(b, \widetilde{b})/\exp_b < Y, \widetilde{b} >)$.

Supposons que $Z_b \notin < \widetilde{b} >$.

Alors $< Z_{j_1+1}, \ldots, Z_n > / < \widetilde{b} > \equiv \mathbb{R}Z_b \bmod < \widetilde{b} >$ pour tout $(b, \widetilde{b})$ et $< Y, Z_{j_1+1}, \ldots, Z_n > / < \widetilde{b} > \equiv < Y, Z_b > \bmod < \widetilde{b} >$.

Pour $l \in L_{(b,\widetilde{b})}$ tel que $< l, Z_b > \neq 0$, posons $c_l =< l, Z_b >$ $(\neq 0)$ et notons $\chi_{(b,\widetilde{b},l)}$ le caractère défini sur

$$\exp_{(b,\widetilde{b})}\Big(< Y, Z_{j_1+1}, \ldots, Z_{j_n} > / < \widetilde{b} > \Big) \equiv \exp_b(< Y, Z_b >)$$

par $\chi_{(b,\widetilde{b},l)}(u) = e^{-2\pi i < l, \log_{(b,\widetilde{b})} u >}$.

En particulier, $\chi_{(b,\widetilde{b},c_l)}(\exp_b(rZ_b)) := \chi_{(b,\widetilde{b},l)}(\exp_b(rZ_b)) = e^{-2\pi i r c_l}$.

On définit la fonction f_1 par

$$f_1(b, \widetilde{b}, s, t, \alpha, g_1, l) \;:=\; \int_{\exp_{(b,\widetilde{b})}(< Z_{j_1+1}, \ldots, Z_n > / < \widetilde{b} >)} f_0(b, \widetilde{b}, s, t, \alpha, g_1 \cdot z)\chi_{(b,\widetilde{b},l)}(z)dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f_0(b,\widetilde{b},s,t,\alpha,g_1\cdot \exp_b(vZ_b))e^{-2\pi i v c_l}dv \quad \text{si } Z_b \notin <\widetilde{b}>$$

pour $g_1 \in R_1(b,\widetilde{b}) = \exp_{(b,\widetilde{b})}\mathfrak{r}_1(b,\widetilde{b})$.

Ecrivons $f_1(b,\widetilde{b},s,t,\alpha;g_1,c_l)$ et notons que, pour $(b,\widetilde{b},s,t,\alpha)$ fixé,

$f_1(b,\widetilde{b},s,t,\alpha;\cdot,c) \in \mathcal{S}(P_1(b,\widetilde{b})/\exp_b <Y,Z_{j_1+1},\dots,Z_n>,\chi_{(b,\widetilde{b},c)})$,

ce qui signifie que c'est une fonction de Schwartz sur $P_1(b,\widetilde{b})/\exp_b <Y,Z_{j_1+1},\dots,Z_n>$ (pour chaque base fixée), vérifiant la condition de covariance

$$f_1(b,\widetilde{b},s,t,\alpha;g_1\cdot \exp_b(yY)\cdot \exp_b(zZ_b)\cdot z_{\widetilde{b}},c) = e^{2\pi i c z} f_1(b,\widetilde{b},s,t,\alpha;g_1,c)$$

pour tout $z_{\widetilde{b}} \in \exp_b(<\widetilde{b}>)$,

i.e., la covariance pour le caractère $\chi_{(b,\widetilde{b},c)} = \chi_{(b,\widetilde{b},l_c)}$ sur $<Y,Z_b,\widetilde{b}>=<Y,Z_{j_1+1},\dots,Z_n>$, où la forme linéaire l_c satisfait $<l_c,Y>=<l_c,\widetilde{b}_j>=0$ pour chaque j et $<l_c,Z_b>=c$.

Elle est de Schwartz en s,t,α,c et $\mathcal{C}^\infty$ en $b,\widetilde{b}$.

De plus, comme $\dot{\widetilde{F}}(b,\widetilde{b},\widetilde{l},\cdot,\cdot,\cdot;\cdot,\cdot) \equiv 0$ si $\widetilde{l} \notin K(b,\widetilde{b})$, il existe une constante $C(b,\widetilde{b})$ telle que $\dot{\widetilde{\pi}}_{(b,\widetilde{b},\widetilde{l})}(f_0(b,\widetilde{b},\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)) \equiv 0$ si $|<\widetilde{l},\widetilde{Z}_b>| = |c_l| < C(b,\widetilde{b})$ (comme $K(b,\widetilde{b}) \subset \widetilde{\mathcal{D}}_{\widetilde{T},gen}$ est compact et comme $<\widetilde{l},\widetilde{Z}_b> \neq 0$ pour $\widetilde{l} \in K(b,\widetilde{b})$).

Dans ce cas,

$$\dot{\widetilde{\pi}}_{(b,\widetilde{b},\widetilde{l})}(f_0(b,\widetilde{b},\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)) = \int_{R_1(b,\widetilde{b})/\exp_b(\mathbb{R}Z_b)} \dot{\widetilde{\pi}}_{(b,\widetilde{b},\widetilde{l})}(g_1)\Big[\int_{\mathbb{R}} f_0(b,\widetilde{b},\cdot,\cdot,\cdot,g_1\exp_b(zZ_b))e^{-2\pi i c_l z}dz\Big]d\dot{g}_1 = 0$$

pour toute forme linéaire $\widetilde{l}$ telle que $|c_l| < C(b,\widetilde{b})$ et donc

$$f_1(b,\widetilde{b},\cdot,\cdot,\cdot,g_1,c_l) = \int_{\mathbb{R}} f_0(b,\widetilde{b},\cdot,\cdot,\cdot,g_1\cdot \exp_b(zZ_b))e^{-2\pi i z c_l}dz = 0,.$$

Ceci est en particulier vrai si $<l,Z_b>=c_l=0$.

Définissons à présent une fonction $\widetilde{RF}$ par

$$\widetilde{RF}(b,\widetilde{b},\alpha,\exp_b(sX)\cdot g_1,l) = \widetilde{RF}(b,\widetilde{b},\alpha,\exp_b(sX)\cdot g_1,c_l) := \int_{\mathbb{R}} f_1(b,\widetilde{b},s,t,\alpha,g_1^{-t},c_l)dt$$

si $c_l=<l,Z_b>$, où $g_1^{-t} = \exp_b(-tX)\cdot g_1\cdot \exp_b(tX)$ et $g_1 \in P_1(b,\widetilde{b})/\exp_b(<\widetilde{b}>)$.

Pour $g_1 = w \cdot \exp_b(yY) \cdot \exp_b(zZ_b) \bmod \exp_b(< \widetilde{b} >)$, le calcul montre que

$$\widetilde{RF}(b,\widetilde{b},\alpha,\exp_b(sX)\cdot w\cdot\exp_b(yY)\cdot\exp_b(zZ_b),c) = \frac{1}{c}e^{2\pi icz}\int_{\mathbb{R}} f_1(b,\widetilde{b},s,\frac{t}{c},\alpha,w^{-\frac{t}{c}},c)e^{-2\pi ity}dt,$$

si $c \neq 0$ et $\widetilde{RF}(b,\widetilde{b},\alpha,\cdot,0) = 0$.

Remarquons que pour $b,\widetilde{b}$ fixés, on obtient une fonction de Schwartz en α, s, w, y, c, comme $f_1(b,\widetilde{b},\cdot,\cdot,\cdot;\cdot,c) \equiv 0$ si $|c| < C(b,\widetilde{b})$, spécialement si $c = 0$, et

$$\widetilde{RF}(b,\widetilde{b},\alpha,\cdot,c) \in \mathcal{S}(G_b/\exp_b(Z_b,\widetilde{b}),\chi_{(b,\widetilde{b},c)}) = \mathcal{S}(G_b/\exp_b < Z_{j_1+1},\ldots,Z_n >,\chi_{(b,\widetilde{b},c)}),$$

i.e., elle vérifie la condition de covariance

$$\widetilde{RF}(b,\widetilde{b},\alpha,g\cdot\exp_b(zZ_b),c) = e^{2\pi icz}\widetilde{RF}(b,\widetilde{b},\alpha,g,c)$$

puisque f_1 a cette même propriété.

Finalement on obtient une fonction RF définie par

$$\begin{aligned} RF(b,\widetilde{b},\alpha,g) &:= \int_{\mathbb{R}} \widetilde{RF}(b,\widetilde{b},\alpha,\exp_b(sX)\cdot w\cdot\exp_b(yY)\cdot\exp_b(zZ_b),c)dc \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widetilde{RF}(b,\widetilde{b},\alpha,\exp_b(sX)\cdot w\cdot\exp_b(yY),c)e^{2\pi icz}dc \end{aligned}$$

si $g = \exp_b(sX)\cdot w\cdot\exp_b(yY)\cdot\exp_b(zZ_b) \bmod \exp_b(< \widetilde{b} >)$.

Comme $\widetilde{RF}$ est de Schwartz en c, RF est de Schwartz en z.

En particulier, pour tout $b,\widetilde{b},\alpha$, $RF(b,\widetilde{b},\alpha,\cdot) \in \mathcal{S}(G_b/ < \widetilde{b} >)$.

Remarquons que $\dot{\widetilde{F}}$ dépend seulement de $b, < \widetilde{b} >$ (à la place de $b,\widetilde{b}$). Ainsi ceci est vrai aussi pour $f_0, f_1, \widetilde{RF}, RF$.

Par construction, RF est $\mathcal{C}^\infty$ en $b,\widetilde{b}$ et de Schwartz en α.

Ainsi, pour b,α fixés, on définit une fonction de Schwartz sur $G_b/\exp_b(< \widetilde{b} >)$ pour tout $\widetilde{b}$ tel que $Z_b \notin < \widetilde{b} >$.

Le théorème d'inversion de Fourier implique que

$$\widehat{RF}^{Z_b}(b,\widetilde{b},\alpha,g,c) := \int_{\mathbb{R}} RF(b,\widetilde{b},\alpha,g\cdot\exp_b(zZ_b))e^{-2\pi icz}dz = \widetilde{RF}(b,\widetilde{b},\alpha,g,c),$$

où $\widehat{RF}^{Z_b}$ désigne la transformée de Fourier dans la direction de Z_b.

Soient $\mathcal{E}, \mathcal{E}', \mathcal{E}_1, \mathcal{E}'_1$ comme dans 4.1. Rappelons que l'on a défini $RF(b, \widetilde{b}, \cdot, \cdot)$ pour tout $(b, \widetilde{b}) \in \mathcal{E}'_1$, i.e., pour tout $(b, \widetilde{b})$ tel qu'il existe au moins une forme linéaire $l \in \mathfrak{g}^*$ telle que $(b, l) \in \mathcal{D}_{T,gen}$ et telle que $Z_b \notin < \widetilde{b} >$.

Définissons

$$RF(b, \widetilde{b}, \cdot, \cdot) := 0 \text{ si } Z_b \in < \widetilde{b} > .$$

On doit prouver que cette extension de la fonction RF à $\mathcal{E}'$ est $\mathcal{C}^\infty$ en $(b, \widetilde{b})$. Pour obtenir ce résultat, soit $(b_0, \widetilde{b_0}) \in \mathcal{E}'$ tel que $Z_{\widetilde{b_0}} \in < \widetilde{b_0} >$. On doit montrer qu'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{O}$ de $(b_0, \widetilde{b_0})$ tel que $RF(b, \widetilde{b}, \cdot, \cdot) \equiv 0$ pour tout $(b, \widetilde{b}) \in \mathcal{O} \cap \mathcal{E}'_1$. Ceci impliquera que l'extension de RF est $\mathcal{C}^\infty$ en $(b, \widetilde{b})$ autour de $(b_0, \widetilde{b_0})$.

Soit $l \in \mathfrak{g}^*$ telle que $l_{|<Z_{j_1+1}, \ldots, Z_n>} \not\equiv 0$ et notons

$$l_{|<Z_{j_1+1}, \ldots, Z_n>} = l_{j_1+1} Z^*_{j_1+1} + \cdots + l_n Z^*_n.$$

Ainsi $\ker(l_{|<Z_{j_1+1}, \ldots, Z_n>})$ est un hyperplan de $< Z_{j_1+1}, \ldots, Z_n >$ qui admet $\frac{1}{\sqrt{l^2_{j_1+1} + \cdots + l^2_n}}(l_{j_1+1}, \ldots, l_n)$ (exprimé dans la base $Z^*_{j_1+1}, \ldots, Z^*_n$) comme vecteur normal unitaire.

En effet $(a_{j_1+1}, \ldots, a_n) = a_{j_1+1} Z_{j_1+1} + \cdots + a_n Z_n \in \ker(l_{|<Z_{j_1+1}, \ldots, Z_n>})$ si et seulement si $a_{j_1+1} l_{j_1+1} + \cdots + a_n l_n = 0$.

Donc

$$\begin{aligned} Z_b \in \ker(l_{|<Z_{j_1+1}, \ldots, Z_n>}) &\Leftrightarrow (l_{j_1+1}, \ldots, l_n) \cdot Z_b = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(l_{j_1+1}, \ldots, l_n) \cdot Z_b}{\sqrt{l^2_{j_1+1} + \cdots + l^2_n} \|Z_b\|} = 0 \end{aligned}$$

où $\cdot$ désigne le produit scalaire et Z_b est aussi exprimé dans la base $Z_{j_1+1}, \ldots, Z_n$.

Considérons

$$\mathcal{N} := \{(b, l) \in \mathcal{B}_1 \times V_T \mid \; < l, Z_b >= 0\}$$

et $(b_0, l_0) \in \mathcal{N}$ tels que $\ker l_{0|<Z_{j_1+1}, \ldots, Z_n>} =< \widetilde{b_0} >$. Soit $\mathcal{K}$ un voisinage compact de $(b_0, l_0) \in \mathcal{B}_1 \times V_T$ et soit $\mathrm{int}(\mathcal{K})$ son intérieur. D'après la définition 3.6 (iv), il existe pour tout $(b_1, l_1) \in \mathcal{N}$ un voisinage ouvert $\mathcal{V}_{(b_1, l_1)}$ dans $\mathcal{B}_1 \times V_T$ tel que $F(b, l, \cdot, \cdot, \cdot) \equiv 0$ pour tout $(b, l) \in \mathcal{V}_{(b_1, l_1)}$.

Posons

$$\mathcal{V} := \bigcup_{(b_1,l_1)\in\mathcal{N}\cap\mathcal{K}} \mathcal{V}_{(b_1,l_1)}.$$

Alors $\mathcal{V}$ est un ouvert de $\mathcal{B}_1 \times V_T$, $F(b,l,\cdot,\cdot,\cdot) \equiv 0$ pour tout $(b,l) \in \mathcal{V}$ et $\mathcal{K}_1 := \mathcal{K} \cap \big((\mathcal{B}_1 \times V_T) \setminus \mathcal{V}\big)$ est compact. Par construction, $< l, Z_b >\neq 0$ sur $\mathcal{K}_1$.

Définissons maintenant

$$\mathcal{W} := \{l \in \mathfrak{g}^* \mid l_{|<Z_{j_1+1},\ldots,Z_n>} \not\equiv 0\}$$

(ouvert de Zariski de $\mathfrak{g}^*$) et

$$f : \mathcal{K} \cap \mathcal{W} \to \mathbb{R}$$

par

$$f(b,l) := \Big| \frac{(l_{j_1+1},\ldots,l_n)\cdot Z_b}{\sqrt{l_{j_1+1}^2 + \cdots + l_n^2}\|Z_b\|} \Big|.$$

Cette fonction f est continue et strictement positive sur le compact $\mathcal{K}_1$. Elle représente le cosinus de l'angle entre les directions de $< Z_{j_1+1},\ldots,Z_n >$ défini par Z_b et par un vecteur normal à $\ker l_{|<Z_{j_1+1},\ldots,Z_n>}$.

Soit

$$\varepsilon := \min\{f(b,l) \mid (b,l) \in \mathcal{K}_1\}.$$

Alors $\varepsilon > 0$ et

$$\mathcal{U} := \{(b,l) \in \mathrm{int}(\mathcal{K}) \cap \mathcal{W} \mid f(b,l) < \frac{\varepsilon}{2}\}$$

est un ouvert non vide de $\mathcal{B}_1 \times V_T$, contenu dans $\mathcal{K}$, contenant (b_0,l_0) car $f(b_0,l_0) = 0$.

Posons alors

$$\begin{array}{rcl} \Psi : \mathcal{E}' & \to & \mathcal{B}_1 \times V_T \\ (b,\widetilde{b}) & \mapsto & \big(b, (\widetilde{b}_1 \wedge \cdots \wedge \widetilde{b}_{m-1})^*\big) \end{array}$$

où $(\widetilde{b}_1 \wedge \cdots \wedge \widetilde{b}_{m-1})^*$ est défini par

$$\begin{array}{l} (\widetilde{b}_1 \wedge \cdots \wedge \widetilde{b}_{m-1})^*(\widetilde{b}_1 \wedge \cdots \wedge \widetilde{b}_{m-1}) = 1 \\ (\widetilde{b}_1 \wedge \cdots \wedge \widetilde{b}_{m-1})^*(\widetilde{b}_j) = 0 \qquad \text{pour } j = 1,\ldots m-1 \\ (\widetilde{b}_1 \wedge \ldots \widetilde{b}_{m-1})^*(Z_k) = 0 \qquad \text{pour } k \leq j_1 \end{array}$$

Clairement, $(\widetilde{b}_1 \wedge \cdots \wedge \widetilde{b}_{m-1})^* \in V_T$, comme ses coordonnées sont nulles sur les indices de saut de Pukanszky. Bien sûr, les coordonnées de $(\widetilde{b}_1 \wedge \cdots \wedge \widetilde{b}_{m-1})^*$ dans la base $Z^*_{j_1+1}, \ldots Z^*_n$ coincident avec les coordonnées de $\widetilde{b}_1 \wedge \ldots \widetilde{b}_{m-1}$ dans la base $Z_{j_1+1}, \ldots, Z_n$.

La fonction Ψ est continue.

Remarquons aussi que $\mathfrak{Im}\Psi \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$.

En effet, soit $l \in V_T$ telle que l'angle de Z_{b_0} avec $\ker(l_{|<Z_{j_1+1},\ldots,Z_n>})$ est très proche de $\frac{\pi}{2}$, mais différent de celui-ci, alors $0 < f(b_0, l) < \frac{\varepsilon}{2}$. Prenons à présent $\widetilde{b}$ une base arbitraire de $\ker(l_{|<Z_{j_1+1},\ldots,Z_n>})$.

Donc $Z_{b_0} \notin < \widetilde{b} >$, $(\widetilde{b}_1 \wedge \ldots \widetilde{b}_{m-1})^* = kl_{|<Z_{j_1+1},\ldots,Z_n>}$ pour une constante k

et $f\big(b_0, (\widetilde{b}_1 \wedge \cdots \wedge \widetilde{b}_{m-1})^*\big) = f(b_0, l) < \frac{\varepsilon}{2}$.

D'où $\big(b_0, (\widetilde{b}_1 \wedge \cdots \wedge \widetilde{b}_{m-1})^*\big) \in \mathcal{U} \cap \mathfrak{Im}\Psi$.

Donc $\mathcal{O} = \Psi^{-1}(\mathcal{U})$ est un ouvert non vide de $\mathcal{E}'$, contenant $(b_0, \widetilde{b}_0)$

car $f\big(b_0, ((\widetilde{b}_0)_1 \wedge \cdots \wedge (\widetilde{b}_0)_{m-1})^*\big) = 0$.

Soit $(b, \widetilde{b}) \in \mathcal{O} \cap \mathcal{E}'_1$, i.e., tel que $Z_b \notin < \widetilde{b} >$. Soit $(b, l) = \Phi(b, \widetilde{b}, \widetilde{l})$

avec $l = (\widetilde{b}_1 \wedge \cdots \wedge \widetilde{b}_{m-1})^* \in V_T$ et $\widetilde{l}$ l'élément correspondant de $\mathfrak{r}^*_1$ (voir la définition 3.3 pour Φ).

En particulier, $(b, l) = \Psi(b, \widetilde{b}) \in \mathcal{U}$ et $f(b, l) < \frac{\varepsilon}{2}$. Donc $(b, l) \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_1$, i.e., $(b, l) \in \mathcal{V}$ et $F(b, l, \cdot, \cdot, \cdot) \equiv 0$.

Ce qui implique que $\dot{\widetilde{F}}(b, \widetilde{b}, \widetilde{l}, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot) \equiv 0$.

D'où $f_0(b, \widetilde{b}, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot) \equiv 0$ et $RF(b, \widetilde{b}, \cdot, \cdot) \equiv 0$, d'après les constructions ci-dessus.

Ce qu'il fallait démontrer.

Supposons encore que $Z_b \notin < \widetilde{b} >$. Soit $\widetilde{l} \in \mathfrak{p}_1(b, \widetilde{b})^*$ ($\widetilde{l}$ étant choisie dans la section des orbites) telle que $\widetilde{l}_{|<\widetilde{b}>} \equiv 0$ et $< \widetilde{l}, Y >= 0$. Alors les représentations de $P_1(b, \widetilde{b})$ et $P_1(b, \widetilde{b})/\exp_b(< \widetilde{b} >)$ induites par le caractère $\chi_{(b,\widetilde{b},\widetilde{l})}$ agissent sur le même espace L^2 et peuvent donc être identifiées.

Notons les $\widetilde{\pi}_{(b,\widetilde{b},\widetilde{l})}$. On obtient, pour $c =< \widetilde{l}, Z_b >$, pour $RF(b, \widetilde{b}, \alpha, \exp_b(sX)(\cdot))$ considérée comme une fonction sur $P_1(b, \widetilde{b})/ < \widetilde{b} >$,

$$\begin{aligned}\widetilde{\pi}_{(b,\widetilde{b},\widetilde{l})}(RF(b, \widetilde{b}, \alpha, \exp_b(sX)(\cdot)) &= \int\int\int RF(b, \widetilde{b}, \alpha, \exp_b(sX) \cdot w \cdot \exp_b(yY) \\ &\qquad \cdot \exp_b(zZ_b))\widetilde{\pi}_{(b,\widetilde{b},\widetilde{l})}(w \cdot \exp_b(yY) \cdot \exp_b(zZ_b))d\dot{w}dydz\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int\int\int RF(b,\widetilde{b},\alpha,\exp_b(sX)\cdot w\cdot \exp_b(yY) \\
&\qquad \cdot\exp_b(zZ_b))\widetilde{\pi}_{(b,\widetilde{b},\widetilde{l})}(w)e^{-2\pi icz}d\dot{w}dydz \\
&= \int\int \widetilde{RF}(b,\widetilde{b},\alpha,\exp_b(sX)\cdot w\cdot \exp_b(yY),c)\widetilde{\pi}_{(b,\widetilde{b},\widetilde{l})}(w)d\dot{w}dy \\
&= \int\int\int f_1(b,\widetilde{b},s,t,\alpha,w^{-t}\cdot \exp_b(yY)\cdot\exp_b(-ytZ_b),c) \\
&\qquad \widetilde{\pi}_{(b,\widetilde{b},\widetilde{l})}(w)d\dot{w}dydt \\
&= \int\int\int f_1(b,\widetilde{b},s,t,\alpha,w^{-t},c)e^{-2\pi icyt}\widetilde{\pi}_{(b,\widetilde{b},\widetilde{l})}(w)d\dot{w}dydt.
\end{aligned}
$$

Soit à présent $l \in \mathfrak{g}^* \cap V_T$ telle que $(b,l) \in \mathcal{D}_{T,gen}$ et $l_{|<\widetilde{b}>} \equiv 0$.

En particulier, $< l,X >=< l,Y >= 0$, par le choix des sections d'orbite et $c =< l,Z_b >\neq 0$ comme $(b,l)\in \mathcal{D}_{T,gen}$. Soit $\widetilde{l}$ la forme linéaire correspondante sur $\mathfrak{r}_1(b,\widetilde{b})$ et $\dot{\widetilde{\pi}}_{(b,\widetilde{b},\widetilde{l})}$ la représentation associée de $R_1(b,\widetilde{b})$.

Remarquons que $\pi_{(b,l)}$ peut être considérée comme une représentation de G_b et de $G_b/\exp_b(<\widetilde{b}>)$, car $<\widetilde{b}>$ est contenu dans la polarisation en l et car $l_{|<\widetilde{b}>}\equiv 0$. Cette identification sera faite dans les calculs suivants :

$$
\begin{aligned}
\Big(\pi_{(b,l)}(RF(b,\widetilde{b},\alpha,\cdot))\xi\Big)(s)(g_1) &= \int \widetilde{\pi}_{(b,\widetilde{b},\widetilde{l})}\Big(RF(b,\widetilde{b},\alpha,\exp_b(s-t)X\cdot(\cdot)^t)\Big)\xi(t)(g_1)dt \\
&= \int\int\int\int RF(b,\widetilde{b},\alpha,\exp_b(s-t)X\cdot(w\exp_b yY\exp_b zZ_b)^t) \\
&\qquad \widetilde{\pi}_{(b,\widetilde{b},\widetilde{l})}(w)e^{-2\pi icz}\xi(t)(g_1)d\dot{w}dydzdt \\
&= \int\int\int \widetilde{RF}(b,\widetilde{b},\alpha,\exp_b(s-t)X\cdot(w\exp_b yY)^t,c) \\
&\qquad \widetilde{\pi}_{(b,\widetilde{b},\widetilde{l})}(w)\xi(t)(g_1)d\dot{w}dydt \\
&= \int\int\int\Big(\int f_1(b,\widetilde{b},s-t,u,\alpha,(w\exp_b yY)^{t-u},c)du\Big) \\
&\qquad \widetilde{\pi}_{(b,\widetilde{b},\widetilde{l})}(w)\xi(t)(g_1)d\dot{w}dydt \\
&= \int\int\int\int f_1(b,\widetilde{b},s-t,u,\alpha,w^{t-u}\exp_b yY\exp_b(t-u)yZ_b,c) \\
&\qquad \widetilde{\pi}_{(b,\widetilde{b},\widetilde{l})}(w)\xi(t)(g_1)dud\dot{w}dydt \\
&= \int\int\int\int f_1(b,\widetilde{b},s-t,u,\alpha,w^{t-u},c)e^{2\pi ic(t-u)y} \\
&\qquad \widetilde{\pi}_{(b,\widetilde{b},\widetilde{l})}(w)\xi(t)(g_1)dud\dot{w}dydt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int\int\int\int\Big(\int f_0(b,\widetilde{b},s-t,u,\alpha,w^{t-u}\exp_b rZ_b)e^{-2\pi icr}dr\Big)\\
&\qquad e^{2\pi ic(t-u)y}\widetilde{\pi}_{(b,\widetilde{b},\widetilde{l})}(w)\xi(t)(g_1)dud\dot{w}dydt\\
&= \frac{1}{|c|}\int\int\int f_0(b,\widetilde{b},s-t,t,\alpha,w\exp_b rZ_b)e^{-2\pi icr}\\
&\qquad \widetilde{\pi}_{(b,\widetilde{b},\widetilde{l})}(w)\xi(t)(g_1)d\dot{w}dtdr\\
&= \frac{1}{|c|}\int\int\int f_0(b,\widetilde{b},s-t,t,\alpha,w\exp_b rZ_b)\\
&\qquad \dot{\widetilde{\pi}}_{(b,\widetilde{b},\widetilde{l})}(w\exp_b rZ_b)\xi(t)(g_1)d\dot{w}dtdr\\
&= \frac{1}{|c|}\int\dot{\widetilde{\pi}}_{(b,\widetilde{b},\widetilde{l})}\Big(f_0(b,\widetilde{b},s-t,t,\alpha,(\cdot)\Big)\xi(t)(\dot{g}_1)dt\\
&= \frac{1}{|c|}\int\int_{R_1(b,\widetilde{b})/P_{(b,\widetilde{b},\widetilde{l})}}\dot{\widetilde{F}}(b,\widetilde{b},\widetilde{l},s-t,t,\alpha,\dot{g}_1,\dot{g}_1')\xi(t)(\dot{g}_1')d\dot{g}_1'dt\\
&= \int\int_{P_1(b,\widetilde{b})/P_{(b,l)}}F(b,l,\alpha,\exp_b sX\cdot g_1,\exp_b tX\cdot g_1')\\
&\qquad \xi(\exp_b tX\cdot g_1')d\dot{g}_1'dt
\end{aligned}
$$

où $B_{(b,\widetilde{b},\widetilde{l})}=\exp_{(b,\widetilde{b})}\mathfrak{b}_{(b,\widetilde{b},\widetilde{l})}$, $B_{(b,l)}=\exp_b\mathfrak{b}_{(b,l)}$ et où les polarisations respectives $\mathfrak{b}_{(b,\widetilde{b},\widetilde{l})}$ et $\mathfrak{b}_{(b,l)}$ vérifient $\mathfrak{b}_{(b,\widetilde{b},\widetilde{l})}=\mathfrak{b}_{(b,l)} \bmod <Y,\widetilde{b}>$.

On a donc construit une fonction $RF(b,\widetilde{b},\alpha,\dot{g})$, avec $\dot{g}\in G_b/\exp_b(<\widetilde{b}>)$ pour $b,\widetilde{b}$ fixés avec $Z_b\notin<\widetilde{b}>$, tel que l'opérateur $\pi_{(b,l)}(RF(b,\widetilde{b},\alpha,\cdot))$ admette $F(b,l,\alpha,\cdot,\cdot)$ comme noyau pour chaque l telle que $l_{|<\widetilde{b}>}\equiv 0$, si $\pi_{(b,l)}$ est considérée comme une représentation de $G_b/\exp_b(<\widetilde{b}>)$.

A présent nous devons construire une fonction $f(b,\alpha,\cdot)=f_b(\alpha)(\cdot)$ définie sur tout G_b telle que l'opérateur $\pi_{(b,l)}(f_b(\alpha)(\cdot))$ admette $F(b,l,\alpha,\cdot,\cdot)$ comme noyau pour $(b,l)\in\mathcal{D}_{T,gen}$, si $\pi_{(b,l)}$ est considérée comme une représentation de G_b. Pour ce faire, on va utiliser la transformée de Radon. Tout d'abord changeons la paramétrisation, pour obtenir les hypothèses concernant la théorie de la transformée de Radon.

Notons $\varepsilon(\widetilde{b})$ le signe de $Z_b\cdot(\widetilde{b}_1\wedge\cdots\wedge\widetilde{b}_{m-1})=\det(Z_b,\widetilde{b}_1,\ldots,\widetilde{b}_{m-1})$, dans le cas où $Z_b\notin<\widetilde{b}>$.

Définissons alors

$$\omega_{\widetilde{b}}=\varepsilon(\widetilde{b})\frac{\widetilde{b}_1\wedge\cdots\wedge\widetilde{b}_{m-1}}{\|\widetilde{b}_1\wedge\cdots\wedge\widetilde{b}_{m-1}\|},$$

i.e., ω_b est le vecteur normal unitaire à l'hyperplan $<\widetilde{b}>$ pointant vers le même demi-plan que Z_b.

Posons $k(b,\widetilde{b}) = Z_b \cdot \omega_{\widetilde{b}}$ où $\cdot$ désigne le produit scalaire.

Alors $k(b,\widetilde{b})$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ en $b,\widetilde{b}$ qui est strictement positive si $Z_b \not\in <\widetilde{b}>$. Chaque élément u de $< Z_{j_1+1},\dots,Z_n >$ admet alors deux différentes décompositions :

$$u = \alpha_1\widetilde{b}_1 + \dots + \alpha_{m-1}\widetilde{b}_{m-1} + \alpha_m Z_b = \beta_1\widetilde{b}_1 + \dots \beta_{m-1}\widetilde{b}_{m-1} + \beta_m\omega_{\widetilde{b}}.$$

D'où

$$\beta_m = u\cdot\omega_{\widetilde{b}} = \alpha_m(Z_b\cdot\omega_{\widetilde{b}}) = \alpha_m k(b,\widetilde{b})$$

et

$$Z_b = k(b,\widetilde{b})\omega_{\widetilde{b}} + a(b,\widetilde{b})$$

pour $a(b,\widetilde{b}) \in <\widetilde{b}>$, les coordonnées de $a(b,\widetilde{b})$ étant des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ en $b,\widetilde{b}$.

Définissons maintenant la fonction

$$g_{(b,\widetilde{b})}(\alpha)(\dot{w};(\omega_{\widetilde{b}},r)) := \frac{1}{k(b,\widetilde{b})}RF(b,\widetilde{b},\alpha,\dot{w}\exp_b(r\omega_{\widetilde{b}})) = \frac{1}{k(b,\widetilde{b})}RF(b,\widetilde{b},\alpha,\dot{w}\exp_b(\frac{1}{k(b,\widetilde{b})}rZ_b)),$$

avec $\dot{w} \in G_b/ < Z_{j_1+1},\dots,Z_n >$ (exprimé dans une base fixe) et où la dernière égalité est justifiée par le fait que RF est définie mod $\exp_b(<\widetilde{b}>)$ et que $a(b,\widetilde{b}) \in <\widetilde{b}>$.

De plus, posons

$$g_{(b,\widetilde{b})}(\alpha)(\cdot) \equiv 0, \quad \text{si } Z_b \in <\widetilde{b}> .$$

La fonction g est définie mod $<\widetilde{b}>$, $\mathcal{C}^\infty$ en $b,\widetilde{b}$, Schwartz en $\omega_{\widetilde{b}},\dot{w},r$, car elle est $\mathcal{C}^\infty$ en $\omega_{\widetilde{b}}$ et $\omega_{\widetilde{b}}$ est bornée.

De plus, comme $r\omega_{\widetilde{b}} = (-r)(-\omega_{\widetilde{b}})$, on obtient

$$g_{(b,\widetilde{b})}(\alpha)(\dot{w};(\omega_{\widetilde{b}},r)) = g_{(b,\widetilde{b})}(\alpha)(\dot{w};(-\omega_{\widetilde{b}},-r)).$$

Pour pouvoir appliquer le résultat concernant la transformée de Radon (voir [He]), on doit encore calculer

$$\int_{\mathbb{R}} r^k g_{(b,\widetilde{b})}(\alpha)(\dot{w};(\omega_{\widetilde{b}},r))dr = \int_{\mathbb{R}} r^k \frac{1}{k(b,\widetilde{b})}RF(b,\widetilde{b},\alpha,\dot{w}\exp_b(\frac{1}{k(b,\widetilde{b})}rZ_b))dr = 0, \quad \forall k\in\mathbb{N}.$$

Ceci est équivalent au fait que

$$\frac{\partial^k}{\partial c^k}\widehat{RF}^{Z_b}(b,\widetilde{b},\alpha,\dot{w},c)|_{c=0}=0,\quad \forall k\in\mathbb{N},$$

où $\widehat{RF}^{Z_b}$ désigne la transformée de Fourier dans la direction Z_b.

Pour la calculer, rappelons que $F(b,l,\cdot,\cdot,\cdot)\equiv 0$ si $l\notin K(b)$, où $K(b)$ est un compact de V_T ne contenant pas 0 et donc, que $\dot{\widetilde{F}}(b,\widetilde{b},\widetilde{l},\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)\equiv 0$ si $\widetilde{l}\notin K(b,\widetilde{b})$ et en particulier si $\widetilde{l}$ est dans un certain voisinage de 0.

Ceci implique qu'il existe une constante $C(b,\widetilde{b})$ telle que

$$f_1(b,\widetilde{b},\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,c)\equiv 0 \text{ et } \widetilde{RF}(b,\widetilde{b},\cdot,\cdot,c)\equiv 0 \text{ si } |c|<C(b,\widetilde{b}).$$

Finalement, comme $\widetilde{RF}(b,\widetilde{b},\cdot,\cdot,c)=\widehat{RF}^{Z_b}(b,\widetilde{b},\cdot,\cdot,c)$, ceci prouve que

$$\frac{\partial^k}{\partial c^k}\widehat{RF}^{Z_b}(b,\widetilde{b},\alpha,\dot{w},c)|_{c=0}=0,\quad \forall k\in\mathbb{N}.$$

D'après les résultats sur la transformée de Radon rappelés dans la section 3.8.1, il existe une unique fonction $f\in\mathcal{S}(G,\mathcal{B}_1,\mathbb{R}^r)$ telle que

$$\begin{aligned}\int_{<\widetilde{b}>} f(b,\alpha,\dot{w}\exp_b(r\omega_{\widetilde{b}})\exp_b v)dv &= \int_{r\omega_{\widetilde{b}}+<\widetilde{b}>} f(b,\alpha,\dot{w}\exp_b u)du\\ &= g_{(b,\widetilde{b})}(\alpha)(\dot{w};(\omega_{\widetilde{b}},r))\\ &= \frac{1}{k(b,\widetilde{b})}RF(b,\widetilde{b},\alpha,\dot{w}\exp_b(\frac{1}{k(b,\widetilde{b})}rZ_b))\end{aligned}$$

Finalement, si $\ker(l_{|<Z_{j_1+1},\ldots,Z_n>})=<\widetilde{b}>$ et $Z_b\notin<\widetilde{b}>$, en particulier si $(b,l)\in\mathcal{D}_{T,gen}$,

$$\begin{aligned}&\pi_{(b,l)}\Big(f(b,\alpha,\quad\cdot\quad)\Big)\xi(g)\\ &\quad= \int_{G/<\widetilde{b}>}\int_{<\widetilde{b}>} f(b,\alpha,g_1v)\pi_{(b,l)}(g_1)\xi(g)dvd\dot{g}_1 \quad (\text{comme } \pi_{(b,l)}(v)=1)\\ &\quad= \int_{G/<Z_{j_1+1},\ldots,Z_n>}\int_{\mathbb{R}}\int_{<\widetilde{b}>} f(b,\alpha,g_2\exp_b(r\omega_{\widetilde{b}})v)\pi_{(b,l)}(g_2\exp_b(r\omega_{\widetilde{b}}))\xi(g)dvdrd\dot{g}_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{G/<Z_{j_1+1},\dots,Z_n>} \int_{\mathbb{R}} \int_{<\widetilde{b}>} f(b,\alpha,g_2\mathrm{exp}_b(r\omega_{\widetilde{b}})v)\pi_{(b,l)}\big(g_2\mathrm{exp}_b(\frac{1}{k(b,\widetilde{b})}rZ_b)\\
&\qquad \mathrm{exp}_b(-\frac{1}{k(b,\widetilde{b})}a(b,\widetilde{b})\big)\xi(g)dvdrd\dot{g}_2\\
&= \int_{G/<Z_{j_1+1},\dots,Z_n>} \int_{\mathbb{R}} \Big[\int_{r\omega_{\widetilde{b}}+<\widetilde{b}>} f(b,\alpha,g_2\mathrm{exp}_b u)du\Big]\\
&\qquad \pi_{(b,l)}(g_2\mathrm{exp}_b(\frac{1}{k(b,\widetilde{b})}rZ_b))\xi(g)drd\dot{g}_2 \quad \text{comme } \pi_{(b,l)}(\mathrm{exp}_b(-\frac{1}{k(b,\widetilde{b})}a(b,\widetilde{b})) = 1\\
&= \int_{G/<Z_{j_1+1},\dots,Z_n>} \int_{\mathbb{R}} g_{(b,\widetilde{b})}(\alpha)(\dot{g}_2,(\omega_{\widetilde{b}},r))\pi_{(b,l)}(g_2\mathrm{exp}_b(\frac{1}{k(b,\widetilde{b})}rZ_b))\xi(g)drd\dot{g}_2\\
&= \int_{G/<Z_{j_1+1},\dots,Z_n>} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{k(b,\widetilde{b})}RF(b,\widetilde{b},\alpha,\dot{g}_2\mathrm{exp}_b(\frac{1}{k(b,\widetilde{b})}rZ_b))\pi_{(b,l)}(g_2)\\
&\qquad \pi_{(b,l)}(\mathrm{exp}_b(\frac{1}{k(b,\widetilde{b})}rZ_b))\xi(g)drdg_2\\
&= \pi_{(b,l)}(RF(b,\widetilde{b},\alpha,\cdot)\xi(g)\\
&= \int_{G/P_{(b,l)}} F(b,l,\alpha,g,g')\xi(g')d\dot{g}'
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que $f(b,\alpha,\cdot)$ est la fonction recherchée.

L'unicité de la fonction f provient du fait que si (b,l) parcourt $\mathcal{D}_{T,gen}$, alors, pour b fixé, l parcourt un ouvert dense de $\mathfrak{g}^*\cap V_T$. Donc, si on suppose qu'il existe deux fonctions différentes f_1 et f_2 telles que $\pi_{(b,l)}(f_j)(\alpha)$ admette $F(b,l,\alpha,\cdot,\cdot)$ pour noyau pour $j=1,2$, pour tout $(b,l)\in\mathcal{D}_{T,gen}$ et tout α, $\pi_{(b,l)}(f_1(b,\alpha,\cdot)) = \pi_{(b,l)}(f_2(b,\alpha,\cdot))$ sur un ouvert dense de $\mathfrak{g}^*$, et ce qui implique que $f_1(b,\alpha,\cdot) = f_2(b,\alpha,\cdot)$ (partout par continuité). Remarquons finalement que toutes les fonctions construites sont $\mathcal{C}^\infty$ dans toutes les variables, car, en particulier, cette propriété est respectée par la construction de l'inversion de la transformée de Radon. En effet, $f\in\mathcal{S}(G,\mathcal{B}_1,\mathbb{R}^r)$.

De plus, par construction, l'application $F\to f$ est injective et continue par rapport aux topologies données.

$\square$

Chapitre 4

Application : décomposition de l'espace L^2 des groupes de Lie nilpotents

4.1 Introduction

Nous allons utiliser le théorème d'inversion de Fourier énoncé dans le chapitre précédent.

Soit $G = \exp(\mathfrak{g})$ un groupe de Lie nilpotent connexe, simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On décrit $L^2(G)$ comme fermeture d'une somme de sous-espaces invariants à gauche qui coïncident avec l'ensemble des solutions faibles, dans $L^2(G)$, d'un certain système d'équations différentielles. La restriction de la représentation régulière gauche à chacun de ces sous-espaces se désintègre en une intégrale directe de représentations irréductibles unitaires de multiplicités 0 et 1.

4.2 Relations entre $\mathfrak{g}$ et un idéal de codimension un

Soit $\widetilde{\mathfrak{g}}$ un idéal de codimension un dans $\mathfrak{g}$ tel que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \widetilde{\mathfrak{g}}$ et soit $X \in \mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X \oplus \widetilde{\mathfrak{g}}$. Pour chaque $l \in \mathfrak{g}^*$, posons $\widetilde{l} = p(l) = l|_{\widetilde{\mathfrak{g}}}$ la projection de l sur $\widetilde{\mathfrak{g}}^*$.

Rappelons que les éléments génériques de $\mathfrak{g}^*$ sont définis par

$$P(l) = \det\big(< l, [X_i, X_j] >\big)_{i,j \in S} \neq 0.$$

Comme $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \widetilde{\mathfrak{g}}$, le polynôme P ne dépend pas de la coordonnée de l dans la direction de X^*. On peut donc le considérer comme un polynôme sur $\widetilde{\mathfrak{g}}^*$, i.e.,

$$P(l) = P(l|_{\widetilde{\mathfrak{g}}}) = P(\widetilde{l}).$$

Donc la projection de $\mathcal{U}$ sur $\widetilde{\mathfrak{g}}$

$$p(\mathcal{U}) = \{l|_{\widetilde{\mathfrak{g}}} \mid l \in \mathfrak{g}^* \text{ et } P(l) \neq 0\} = \{\widetilde{l} \in \widetilde{\mathfrak{g}}^* \mid P(\widetilde{l}) \neq 0\}$$

est un ouvert de Zariski non vide de $\widetilde{\mathfrak{g}}^*$.
De même, l'ensemble $\widetilde{\mathcal{U}} = \widetilde{\mathfrak{g}}^*_{Puk}$ des éléments génériques de $\widetilde{\mathfrak{g}}^*$ est défini par

$$P(\widetilde{l}) = \det\big(< \widetilde{l}, [X_i, X_j] >\big)_{i,j \in \widetilde{S}} \neq 0$$

où $\widetilde{S}$ est l'ensemble des indices des éléments génériques de $\widetilde{\mathfrak{g}}$.
Donc $\widetilde{\mathcal{U}}_1 = p(\mathcal{U}) \cap \widetilde{\mathcal{U}}$ est un ouvert dense de Zariski de $\widetilde{\mathfrak{g}}^*$.

On doit distinguer les deux cas suivants :

Cas I : Saturation des orbites

Pour chaque $l \in \mathfrak{g}^*_{Puk}$,

$$\widetilde{\mathfrak{g}} + \mathfrak{g}(l) \subsetneq \mathfrak{g}.$$

Dans ce cas,

$$\mathfrak{g}(l) \subset \widetilde{\mathfrak{g}}(\widetilde{l}) \subset \widetilde{\mathfrak{g}}$$

et, pour $\widetilde{l} = l|_{\widetilde{\mathfrak{g}}}$, la projection de l'orbite $p(\Omega_l)$ est une réunion disjointe $\bigcup\limits_{t \in \mathbb{R}} (\mathrm{Ad}^* \exp(tX))\Omega_{\widetilde{l}}$ de différentes $\mathrm{Ad}^*\widetilde{G}$-orbites dans $\widetilde{\mathfrak{g}}^*$. L'orbite Ω_l dans $\mathfrak{g}^*$ est p-saturée, i.e.,

$$\Omega_l = p^{-1}(p(\Omega_l)) = p^{-1}(\Omega_{\widetilde{l}}).$$

Cas II : Non saturation des orbites

Pour $l \in \mathfrak{g}^*_{Puk}$,

$$\widetilde{\mathfrak{g}} + \mathfrak{g}(l) = \mathfrak{g}.$$

Dans ce cas,

$$\mathfrak{g}(l) \not\subset \widetilde{\mathfrak{g}},$$

la projection de l'orbite $p(\Omega_l)$ est une seule $\mathrm{Ad}^*\widetilde{G}$-orbite $\Omega_{\widetilde{l}}$ et $p : \Omega_l \to \Omega_{\widetilde{l}}$ est une bijection.

Pour les détails consulter [C-G].

Dans la suite, on notera ces différents cas de saturation : **cas I** et **cas II**.

Si nous choisissons notre suite de Jordan-Hölder passant par l'idéal $\widetilde{\mathfrak{g}}$, c'est-à-dire, $\mathfrak{g}_{n-1} = \widetilde{\mathfrak{g}}$ et posons $X = X_n$, alors le **cas I** signifie que n est un indice de saut pour chaque $l \in \mathfrak{g}^*_{Puk}$ et le **cas II** signifie qu'aucune forme linéaire $l \in \mathfrak{g}^*_{Puk}$ n'admet n comme indice de saut, car tous les éléments de $\mathfrak{g}^*_{Puk}$ ont mêmes indices de saut.

Dans le **cas I**, chaque polarisation $\widetilde{\mathfrak{b}}(\widetilde{l})$ en $\widetilde{l}$ dans $\widetilde{\mathfrak{g}}$ est aussi une polarisation en l dans $\mathfrak{g}$, notée $\mathfrak{b}(l) = \widetilde{\mathfrak{b}}(\widetilde{l})$.

Si on note $B(l) = \exp(\mathfrak{b}(l)) \subset G$ et $\widetilde{B}(\widetilde{l}) = \exp(\widetilde{\mathfrak{b}}(\widetilde{l})) \subset \widetilde{G}$, $B(l) = \widetilde{B}(\widetilde{l}) \subset \widetilde{G} \subset G$.

Alors χ_l et $\chi_{\widetilde{l}}$ définis par $\chi_l(x) = \chi_{\widetilde{l}}(x) = e^{-2\pi i < l, \log x >}$ pour chaque $x \in B(l) = \widetilde{B}(\widetilde{l})$ sont des caractères unitaires sur $B(l) \subset G$, resp. $\widetilde{B}(\widetilde{l}) \subset \widetilde{G}$.

Si on écrit $\pi_l = \mathrm{ind}_{B(l)}^G \chi_l$ et $\pi_{\widetilde{l}} = \mathrm{ind}_{\widetilde{P}(\widetilde{l})}^{\widetilde{G}} \chi_{\widetilde{l}}$ pour les représentations unitaires correspondantes, alors π_l est unitairement équivalente à $\widetilde{\pi}_l$ définie par

$$\widetilde{\pi}_l = \mathrm{ind}_{\widetilde{G}}^G \big(\mathrm{ind}_{\widetilde{P}(\widetilde{l})}^{\widetilde{G}} \chi_{\widetilde{l}}\big) = \mathrm{ind}_{\widetilde{G}}^G \pi_{\widetilde{l}}.$$

L'équivalence unitaire est obtenue de la manière suivante :

soient $\mathcal{H}_{\pi_l}$ et $\mathcal{H}_{\pi_{\widetilde{l}}}$ les espaces de représentation de π_l et $\pi_{\widetilde{l}}$ respectivement. L'espace de représentation de $\widetilde{\pi}_l$ peut alors être identifié à $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_{\pi_{\widetilde{l}}})$, muni de la bonne condition de covariance, et l'équivalence unitaire de π_l et $\widetilde{\pi}_l$ est obtenue par

$$\begin{array}{rcl} U : \mathcal{H}_{\pi_l} & \to & \mathcal{H}_{\widetilde{\pi}_l} \\ \xi & \mapsto & \widetilde{\xi} \end{array}$$

définie par

$$\widetilde{\xi}(x)(\widetilde{g}) = \widetilde{\xi}(x, \widetilde{g}) = \xi\Big(\exp(xX) \cdot \widetilde{g}\Big), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall \widetilde{g} \in \widetilde{G},$$

ou, plus généralement,

$$\widetilde{\xi}\Big(\exp(xX)\cdot\widetilde{g}_1\Big)(\widetilde{g})=\xi\Big(\exp(xX)\cdot\widetilde{g}_1\widetilde{g}\Big),\quad \forall x\in\mathbb{R},\forall\widetilde{g}_1,\widetilde{g}\in\widetilde{G}.$$

Alors $\widetilde{\xi}$ est bien définie et vérifie la bonne covariance. On identifiera très souvent π_l et $\widetilde{\pi}_l$.

Nous allons donner l'expression de la représentation $d\widetilde{\pi}_l$ restreinte à l'algèbre de Lie $\widetilde{\mathfrak{g}}$ et l'algèbre enveloppante $\mathfrak{U}(\widetilde{\mathfrak{g}})$, i.e., l'algèbre tensorielle de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ modulo l'idéal engendré par les tenseurs de la forme

$$X\otimes Y-Y\otimes X-[X,Y]\text{ avec }X,Y\in\widetilde{\mathfrak{g}}.$$

$$\begin{aligned}
d\widetilde{\pi}_l(U)\widetilde{\xi}(t,\widetilde{g}) &= d\pi_l(U)\xi(\exp(tX)\cdot\widetilde{g})\\
&= \frac{d}{ds}\xi(\exp(-sU)\exp(tX)\cdot\widetilde{g})|_{s=0}\\
&= \frac{d}{ds}\widetilde{\xi}\big(t,\exp(-s\mathrm{Ad}(\exp(-tX))U)\cdot\widetilde{g}\big)|_{s=0}\\
&= d\pi_{\widetilde{l}}(\mathrm{Ad}(\exp(-tX))U)\widetilde{\xi}(t,\cdot)(\widetilde{g})
\end{aligned}$$

pour tout $U\in\widetilde{\mathfrak{g}}$.

La formule

$$d\widetilde{\pi}_l(U)\widetilde{\xi}(t,\widetilde{g})=d\pi_{\widetilde{l}}(\mathrm{Ad}(\exp(-tX))U)\widetilde{\xi}(t,\cdot)(\widetilde{g})$$

devient alors vraie pour tout $U\in\mathfrak{U}(\widetilde{\mathfrak{g}})$.

Dans le **cas II** on a, d'après [C-G], pour $l\in\mathfrak{g}^*_{Puk}=\mathcal{U}$:

$$\begin{gathered}\widetilde{\mathfrak{g}}+\mathfrak{g}(l)=\mathfrak{g}\\ \widetilde{\mathfrak{g}}(\widetilde{l})\subsetneq\mathfrak{g}(l)\end{gathered}$$

D'après [C-G] on sait aussi que dans ce cas, pour chaque polarisation $\mathfrak{b}=\mathfrak{b}(l)$ en un élément $l\in\mathcal{U}$, $\widetilde{\mathfrak{b}}=\mathfrak{b}\cap\widetilde{\mathfrak{g}}$ est une polarisation en $\widetilde{l}$ dans $\widetilde{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{b}=\widetilde{\mathfrak{b}}+\mathfrak{g}(l)$ et $\widetilde{\mathfrak{b}}=\widetilde{\mathfrak{b}}(\widetilde{l})$ est de codimension un dans $\mathfrak{b}(l)$.

Finalement, d'après [C-G],

$$\pi_{\widetilde{l}}\simeq\pi_l|_{\widetilde{G}}$$

où
$$\pi_{\tilde{l}} = \mathrm{ind}_{\tilde{B}}^{\tilde{G}} \chi_{\tilde{l}} \quad \text{et} \quad \pi_l = \mathrm{ind}_B^G \chi_l.$$

4.3 Polarisations et bases

Tout d'abord, rappelons que
$$\mathfrak{g}_k =< X_1, \ldots, X_k >$$
est un idéal dans $\mathfrak{g}$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.
Notons $l_k = l|_{\mathfrak{g}_k}$ et
$$\mathfrak{g}_k(l_k) = \{U \in \mathfrak{g}_k \mid \ < l, [U, \mathfrak{g}_k] >= \{0\} \ \}.$$
Alors
$$\mathfrak{b}(l) = \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{g}_j(l_j)$$
est la polarisation de Vergne pour l dans $\mathfrak{g}$ et
$$\mathfrak{b}_k(l_k) = \sum_{j=1}^{k} \mathfrak{g}_j(l_j)$$
est la polarisation de Vergne pour $l_k = l|_{\mathfrak{g}_k}$ dans $\mathfrak{g}_k$, la suite de Jordan-Hölder étant toujours fixée.

Supposons que k n'est pas un indice de saut, i.e.,
$$\mathfrak{g}_{k-1} + \mathfrak{g}(l) = \mathfrak{g}_k + \mathfrak{g}(l).$$
Il est facile alors de montrer que
$$\mathfrak{g}_{k-1} + \mathfrak{g}_k(l_k) = \mathfrak{g}_k + \mathfrak{g}_k(l_k) = \mathfrak{g}_k.$$
Pour passer de $\mathfrak{g}_{k-1}$ à $\mathfrak{g}_k$ nous sommes dans le **cas II**. Les polarisations de Vergne correspondantes vérifient $\mathfrak{b}_k(l_k) = \mathfrak{b}_{k-1}(l_{k-1}) + \mathfrak{b}_k(k_k)$, leur dimension augmente de un

et on peut choisir la même base coexponentielle à $\mathfrak{b}_{k-1}(l_{k-1})$ dans $\mathfrak{g}_{k-1}$ et à $\mathfrak{b}_k(l_k)$ dans $\mathfrak{g}_k$.

Si k est un indice de saut, i.e.,

$$\mathfrak{g}_{k-1} + \mathfrak{g}(l) \subsetneq \mathfrak{g}_k + \mathfrak{g}(l),$$

alors deux situations sont possibles :

(i) Ou bien on a

$$\mathfrak{g}_{k-1} + \mathfrak{g}_k(l_k) = \mathfrak{g}_k + \mathfrak{g}_k(l_k) = \mathfrak{g}_k.$$

On obtient alors les mêmes conclusions que précédemment.

(ii) L'autre possibilité étant

$$\mathfrak{g}_{k-1} + \mathfrak{g}_k(l_k) \subsetneq \mathfrak{g}_k + \mathfrak{g}_k(l_k) = \mathfrak{g}_k.$$

Pour passer de $\mathfrak{g}_{k-1}$ à $\mathfrak{g}_k$, on se retrouve dans le **cas I**. On a $\mathfrak{g}_k(l_k) \subset \mathfrak{g}_{k-1}(l_{k-1})$ et les polarisations de Vergne vérifient $\mathfrak{b}_{k-1}(l_{k-1}) = \mathfrak{b}_k(l_k)$. On doit ajouter X_k à la base coexponentielle à $\mathfrak{b}_{k-1}(l_{k-1})$ dans $\mathfrak{g}_{k-1}$ pour obtenir une base coexponentielle à $\mathfrak{b}_k(l_k)$ dans $\mathfrak{g}_k$.

Remarquons que dans ce cas $X_k \notin \mathfrak{b}_r(l_r) = \displaystyle\sum_{j=1}^{r} \mathfrak{g}_j(l_j)$ pour chaque $r \geq k$ et que donc X_k peut être mis dans la base coexponentielle à $\mathfrak{b}_r(l_r)$ dans $\mathfrak{g}_r$.

En particulier, X_k peut être placé dans la base complémentaire à $\mathfrak{b}(l)$ dans $\mathfrak{g}$. En fait, comme $\mathfrak{b}_{k-1}(l_{k-1}) = \mathfrak{b}_k(l_k)$, $X_k \notin \mathfrak{b}_k(l_k)$. Alors $< l, [X_k, \mathfrak{b}_k(l_k)] > \neq 0$.

Sinon $\mathfrak{b}'_k = \mathfrak{b}_k(l_k) + \mathbb{R}X_k$ vérifierait aussi $< l, [\mathfrak{b}'_k, \mathfrak{b}'_k] >= 0$ et $\mathfrak{b}_k(l_k)$ ne serait pas une polarisation. Donc, il existe $Y_k \in \mathfrak{b}_k(l_k) \subset \mathfrak{b}_r(l_r)$ tel que $< l, [X_k, Y_k] > \neq 0$. D'où $X_k \notin \mathfrak{b}_r(l_r)$, comme $\mathfrak{b}_r(l_r)$ est une polarisation en l_r dans $\mathfrak{b}_r$.

4.4 Restriction du choix des formes linéaires

Finalement, on doit restreindre le choix des éléments $l \in \mathfrak{g}^*$. En fait, dans la deuxième section de ce chapitre, on a vu que si $P_1, \ldots, P_n$ sont les différents polynômes tels que l'ensemble $(\mathfrak{g}_k)^*_{Puk}$ des éléments génériques (au sens de Pukanszky) f de $\mathfrak{g}_k^*$ sont donnés par $P_k(f) \neq 0$, alors, pour pouvoir effectuer correctement les différentes étapes de la récurrence, on doit se restreindre à

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \{\ l \in \mathfrak{g}^* \mid l|_{\mathfrak{g}_k} \in (\mathfrak{g}_k)^*_{Puk}, \forall k\ \} &(4.1)\\
&= \{\ l \in \mathfrak{g}^* \mid P_k(l_k) \neq 0, \forall 1 \leq k \leq n\ \} &(4.2)\\
&= \{\ l \in \mathfrak{g}^* \mid \prod_{k=1}^{n} P_k(l|_{\mathfrak{g}_k}) \neq 0\ \} &(4.3)\\
&\subset \mathfrak{g}^*_{Puk} &(4.4)
\end{aligned}$$

Les polynômes P_k peuvent être bien sûr considérés comme des polynômes sur $\mathfrak{g}^*$ qui ne dépendent pas des coordonnées dans les directions de $X^*_{k+1}, \ldots, X^*_n$

et même $X^*_k, X^*_{k+1}, \ldots, X^*_n$. Donc $\mathcal{V}$ est un ouvert de Zariski de $\mathfrak{g}^*$. De plus, par définition de $\mathcal{V}$, si $l \in \mathcal{V}$, alors $l_k = l|_{\mathfrak{g}_k} \in (\mathfrak{g}_k)^*_{Puk}$ pour chaque k. Comme les différents $\mathfrak{g}_k$ sont des idéaux, l'algèbre $\mathfrak{g}$ et le groupe G agissent sur $\mathfrak{g}_k$ et $\mathfrak{g}^*_k$ par ad, Ad, respectivement ad*, Ad*. Comme les idéaux $\mathfrak{g}_k$ forment une suite de Jordan-Hölder, on montre classiquement que chaque polynôme P_k est G-invariant, comme l'est aussi l'ouvert de Zariski $\mathcal{V}$.

Pour les éléments de cet ouvert de Zariski $\mathcal{V}$, on doit faire les choix suivants : Etant donnée la base fixe $\{X_1, \ldots, X_n\}$ comme dans la section 1, $l \in \mathcal{V}$, on associe à l sa polarisation de Vergne $\mathfrak{b}(l) = \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{b}_j(l_j)$.

Si S représente l'ensemble des indices de saut pour les orbites génériques, posons

$$R = \{\ k \in S \mid \mathfrak{g}_{k-1} + \mathfrak{g}_k(l_k) \subsetneq \mathfrak{g}_k + \mathfrak{g}_k(l_k) = \mathfrak{g}_k,\ \text{pour chaque } l \in \mathcal{V},\ l_k = l|_{\mathfrak{g}_k}\ \}.$$

L'ensemble R est indépendant du choix de l dans $\mathcal{V}$, comme toutes les formes linéaires l_k sont génériques dans $\mathfrak{g}^*_k$ et tous éléments génériques ont mêmes indices de saut. On prend donc

$$\{X_k \mid k \in R\} = \{X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_d}\}$$

comme base complémentaire à $\mathfrak{b}(l)$ dans $\mathfrak{g}$. Cette base ne dépend pas du choix de $l \in \mathcal{V}$. On peut ainsi identifier les espaces de représentation $\mathcal{H}_{\pi_l} = L^2(G/B(l), \chi_l)$ avec $L^2(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{H}^\infty_{\pi_l} = \mathcal{S}(G/B(l), \chi_l)$ avec $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par rapport à la même base pour chaque $l \in \mathcal{V}$, seule la covariance dépend de l.

Remarquons enfin que l'indice d est bien choisi, car la dimension de $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}(l)$ est la moitié de la dimension de l'orbite coadjointe passant par l.

4.5 Un résultat important

Dans un premier temps, donnons quelques définitions :

Définition 4.1. Soit $\mathcal{U}$ un ensemble ouvert de $\mathfrak{g}^*$. Une application

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{U} & \to & \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \\ l & \mapsto & \xi_l \end{array}$$

est dite $\mathcal{C}^\infty$ si les propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) Pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$ fixé, l'application $l \mapsto \xi_l(x)$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{C}$.

(ii) Pour chaque opérateur différentiel de la forme $D_l^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial {l_1}^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial {l_n}^{\alpha_n}}$ où $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, pour chaque $l \in \mathcal{U}$ fixée, la fonction $D_l^\alpha \xi_l(\cdot)$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

(iii) Les applications

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{U} & \to & \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \\ l & \mapsto & D_l^\alpha \xi_l \end{array}$$

sont continues.

On a le théorème principal suivant :

Théorème 4.1. *Soit* $G = \exp(\mathfrak{g})$ *un groupe de Lie nilpotent connexe, simplement connexe. On utilisera les notations et les choix des sections précédentes. En particulier les espaces* $\mathfrak{H}_{\pi_l}$ *et* $\mathfrak{H}_{\pi_l}^\infty$ *seront identifiés avec* $L^2(\mathbb{R}^d)$ *et* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *respectivement. Soit*

$$d = \max\{ \ \dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{b}) \mid \exists l \in \mathfrak{g}^* \text{ tel que } \mathfrak{b} = \mathfrak{b}(l) \text{ est une polarisation en } l \text{ dans } \mathfrak{g} \ \}.$$

(i) Il est possible de construire des ouverts $\mathcal{A}_\varepsilon$ *de* $\mathfrak{g}^*$ *pour chaque* $\varepsilon \in \{-1, 1\}^d$ *de la manière suivante :*

Il existe des polynômes réels non nuls, G-invariants, $R_1, \ldots, R_d$*, il existe un ouvert dense de Zariski G-invariant*

$$\mathcal{W} = \{l \in \mathcal{V} \mid R_j(l) \neq 0, 1 \leq j \leq d\}$$

dans $\mathfrak{g}^*$. On peut décomposer $\mathcal{W}$ en l'union disjointe suivante :

$$\mathcal{W} = \bigsqcup_{\varepsilon \in \{-1,1\}^d} \mathcal{A}_\varepsilon$$

où les ensembles $\mathcal{A}_\varepsilon$ sont des ouverts G-invariants définis par

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \{ \ l \in \mathcal{W} \mid \varepsilon_j R_j(l) > 0, 1 \leq j \leq d \ \}.$$

Certains de ces ensembles $\mathcal{A}_\varepsilon$ peuvent être éventuellement vides.

(ii) S'étant fixé ε tel que $\mathcal{A}_\varepsilon \neq \emptyset$, il existe $V_1 = V_{1,\varepsilon}, \ldots, V_d = V_{d,\varepsilon} \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ et il existe une application $\mathcal{C}^\infty$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}_\varepsilon & \rightarrow & \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \\ l & \mapsto & \xi_l \end{array}$$

où $\xi_l \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \equiv \mathfrak{H}^\infty_{\pi_l}$ tel que

$$\xi_l \neq 0, \quad \forall l \in \mathcal{A}_\varepsilon$$

et

$$d\pi_l(V_j)\xi_l = 0, \quad \forall j \in \{1, \ldots, d\}, \forall l \in \mathcal{A}_\varepsilon.$$

(iii) Pour chaque $k \in \{1, \ldots, d\}$, il existe une application $\mathcal{C}^\infty$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}_\varepsilon & \rightarrow & \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \\ l & \mapsto & \zeta_{l,k} \end{array}$$

où

$$\begin{array}{l} \zeta_{k,l} \neq 0, \quad \forall l \in \mathcal{A}_\varepsilon, \forall k \in \{1, \ldots, d\} \\ d\pi_l(V_j)\zeta_{l,k} = 0 \quad \text{si } j \neq k, \forall l \in \mathcal{A}_\varepsilon \\ d\pi_l(V_k)\zeta_{l,k} \neq 0, \quad \forall l \in \mathcal{A}_\varepsilon. \end{array}$$

(iv) L'élément V_d de l'algèbre enveloppante est de la forme

$$V_d = X_{j_d} - i\varepsilon_d Y_{j_d}$$

où X_{j_d} est le dernier élément de la base de $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}(l)$, $Y_{j_d} \in \mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{j_d-1})$ et $Z_{j_d} = [X_{j_d}, Y_{j_d}] \in \mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$.

(v) Pour chaque $l \in \mathcal{A}_\varepsilon$,

$$\bigcap_{j=1}^{d} \mathrm{Ker} d\pi_l(V_j) = \mathbb{C}\xi_l$$

et, pour $l \in \mathcal{W} \setminus \mathcal{A}_\varepsilon$,

$$\bigcap_{j=1}^{d} \mathrm{Ker} d\pi_l(V_j) = \{0\}.$$

(vi) Les fonctions ξ_l, considérées comme des éléments de $\mathfrak{H}_{\pi_l}^{\infty}$, vérifient les relations de compatibilité suivantes :

$$\xi_{Ad^*(u)(l)}(x) = \xi_l(x \cdot u), \quad \forall l \in \mathcal{W}, \forall u \in G.$$

Cela signifie que la fonction ξ_l est transformée en une fonction $\xi_{Ad^*(u)(l)}$ par l'opérateur d'entrelacement donnant l'équivalence unitaire entre π_l et $\pi_{Ad^*(u)(l)}$.

Démonstration. On démontre ce résultat par récurrence, les sections suivantes détailleront cette preuve. $\square$

Remarque. Pour $\varepsilon \in \{-1, 1\}^d$ fixé, les éléments $V_1, \ldots, V_d \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ du théorème précédent sont construits à l'aide d'un algorithme fixé. Ils dépendent du choix de ε. Si on voulait être tout à fait précis, il faudrait écrire $V_{1,\varepsilon}, \ldots, V_{d,\varepsilon}$.

4.6 Le groupe de Heisenberg

La première étape de la récurrence consiste en l'étude du cas particulier du groupe de Heisenberg H_1. Ceci a été étudié en détail dans [L-M]. Rappelons uniquement les résultats principaux de cette étude. Soient $< X, Y, Z >$ les générateurs de l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}_1$ de H_1 munis du crochet $[X, Y] = Z$.

Pour chaque $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, posons $l_\lambda = \lambda Z^* \in \mathfrak{h}_1^*$. L'orbite coadjointe passant par l_λ est le plan horizontal passant par $(0, 0, \lambda)$ et une polarisation en l_λ dans $\mathfrak{h}_1^*$ est donnée par $\mathfrak{b}_\lambda = \mathbb{R}Y + \mathbb{R}Z$. Soit $B_\lambda = \exp(\mathfrak{b}_\lambda)$. L'orbite en l_λ est associée à la classe d'équivalence de représentation unitaire irréductible de dimension infinie $\pi_\lambda = \mathrm{ind}_{B_\lambda}^{H_1} \chi_{l_\lambda}$, où $\chi_{l_\lambda}\big(\exp(yY)\exp(zZ)\big) = e^{-2\pi i \lambda z}$, par l'application de Kirillov.

Ainsi $\mathcal{W}$ coincide avec $\mathbb{R}X^*+\mathbb{R}Y^*+\mathbb{R}^*Z^*$, $d=1$, $R(aX^*+bY^*+\lambda Z^*)=-\lambda$, $\varepsilon\in\{-1,1\}$.
Pour $\varepsilon=1$, $\mathcal{A}_\varepsilon=\mathcal{A}_1=\{aX^*+bY^*+\lambda Z^*\mid\lambda<0\}$ et $V_\varepsilon=V_1=X-iY$.
Si $l=\lambda Z^*$, la fonction $\xi_l=\xi_\lambda\in\mathcal{S}(\mathbb{R})\equiv\mathfrak{H}_\lambda^\infty$ est donnée par

$$\xi_\lambda(s)=e^{\pi\lambda s^2}.$$

Elle est définie sur le reste de l'orbite en l_λ par la formule

$$\xi_{Ad^*(u)(l_\lambda)}(s)=\xi_\lambda(\exp(sX)\cdot u),\quad\forall s\in\mathbb{R},\forall u\in H_1,$$

en utilisant la relation de covariance.
De même pour $\varepsilon=-1$, où l'on doit prendre $\mathcal{A}_\varepsilon=\mathcal{A}_{-1}=\{aX^*+bY^*+\lambda Z^*\mid\lambda>0\}$, $V_\varepsilon=V_{-1}=X+iY$ et

$$\xi_\lambda(s)=e^{-\pi\lambda s^2}.$$

Voir [L-M] pour plus détails.

4.7 La situation de Kirillov généralisée

Supposons que $n=j_{2d}$ est un indice de saut, i.e.,

$$\mathfrak{g}_{n-1}+\mathfrak{g}(l)\subsetneq\mathfrak{g}_n+\mathfrak{g}(l)=\mathfrak{g}+\mathfrak{g}(l)=\mathfrak{g},\quad\forall l\in\mathcal{V}.$$

Alors $n\in R$ et on se trouve dans le **cas I** pour le passage de $\mathfrak{g}_{n-1}$ à $\mathfrak{g}_n=\mathfrak{g}$.
Posons encore $\widetilde{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}_{n-1}$ et $\widetilde{l}=l_{n-1}=l|_{\widetilde{\mathfrak{g}}}$.
Notons aussi $\widetilde{S}$ l'ensemble des indices de saut de $\widetilde{\mathfrak{g}}$
et $\widetilde{\mathcal{V}}=p(\mathcal{V})=\{\ \widetilde{l}\in\widetilde{\mathfrak{g}}^*\mid\exists l\in\mathcal{V}\text{ tel que }l|_{\widetilde{\mathfrak{g}}}=\widetilde{l}\ \}$.
Comme la dimension de chaque orbite est paire, le nombre des indices de saut doit forcément être aussi pair. Comme, de plus, $\mathfrak{g}(l)$ est de codimension un dans $\widetilde{\mathfrak{g}}(\widetilde{l})$, il n'y a qu'un seul indice de saut j_r pour les éléments génériques dans $\mathfrak{g}^*$ différents de n, qui n'est pas un indice de saut pour les éléments génériques dans $\widetilde{\mathfrak{g}}$. Cet indice doit être le même pour tout $l\in\mathcal{V}$. Donc $\widetilde{S}=S\setminus\{j_r,n\}$ et

$$\widetilde{P}(\widetilde{l})=\det\big(<\widetilde{l},[X_i,X_j]>\big)_{i,j\in S\setminus\{j_r,n\}}.$$

Rappelons que $\widetilde{P}(\widetilde{l})$, $\widetilde{\mathcal{V}} = p(\mathcal{V})$ et $\widetilde{\mathfrak{g}}^*$ sont Ad^*G-invariants. En particulier, si $\widetilde{l}$ est un élément générique de $\widetilde{\mathfrak{g}}^*$ (respectivement si $\widetilde{l} \in \widetilde{\mathcal{V}}$), c'est aussi le cas pour $\mathrm{Ad}^*(\exp(tX))(\widetilde{l})$, pour chaque $t \in \mathbb{R}$.

4.7.1 Les polynômes invariants

Tout d'abord, prouvons qu'il existe sur $\widetilde{\mathfrak{g}}^*$ une fonction polynômiale $\widetilde{R}$ qui est $\mathrm{Ad}^*\widetilde{G}$-invariante, mais qui n'est pas Ad^*G-invariante.

Nous savons que les orbites des éléments de $\widetilde{\mathcal{V}}$ dans $\widetilde{\mathfrak{g}}^*$ sont décrites par une fonction

$$\widetilde{Q}(\widetilde{l}, t) = \sum_{i=1}^{n-1} \widetilde{Q}_i(\widetilde{l}, t) X_i^*.$$

Comme j_r n'est pas un indice de saut pour $(\widetilde{l}, \widetilde{\mathfrak{g}}^*)$, on a

$$\widetilde{Q}_{j_r}(\widetilde{l}, t) = \widetilde{l}_{j_r} + \widetilde{R}_{j_r}(\widetilde{l}_1, \ldots, \widetilde{l}_{j_r - 1}, t_1, \ldots, t_i)$$

où $i < r$ et $\widetilde{R}_{j_r}$ est rationnelle.

De plus, il existe N suffisamment grand tel que la fonction

$$\widetilde{P}^N(\widetilde{l}) \widetilde{R}_{j_r}(\widetilde{l}, t)$$

est un polynôme en $\widetilde{l}$ et t. Ici $\widetilde{P}$ est Ad^*G-invariant et $\widetilde{R}_{j_r}$ est $\mathrm{Ad}^*\widetilde{G}$-invariant. Ainsi $\widetilde{P}^N(\widetilde{l}) \widetilde{R}_{j_r}(\widetilde{l}, t)$ est $\mathrm{Ad}^*\widetilde{G}$-invariant.

Supposons à présent que pour chaque $t \in \mathbb{R}^{2d-2}$, la fonction $\widetilde{P}^N(\widetilde{l}) \widetilde{R}_{j_r}(\widetilde{l}, t)$ est aussi Ad^*G- invariante, en particulier que

$$\widetilde{R}_{j_r}(\mathrm{Ad}^*(\exp sX)\widetilde{l}, t) = \widetilde{R}_{j_r}(\widetilde{l}, t), \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

D'où, pour chaque forme linéaire $l \in \mathcal{V}$ telle que $p(l) = \widetilde{l}$, $p(\Omega_l) = \bigcup_{s \in \mathbb{R}} \mathrm{Ad}^*(\exp(sX))\widetilde{l}$ ne peut être saturée dans la direction de $X_{j_r}^*$.

D'autre part, comme j_r est un indice de saut pour $(l, \mathfrak{g})$, Ω_l et $p(\Omega_l)$ doivent être saturées dans la direction de $X_{j_r}^*$. Cette contradiction montre qu'il existe un certain $t^0 \in \mathbb{R}^{2d-2}$ tel que

$$\widetilde{R}(\widetilde{l}) = P^N(\widetilde{l}) \widetilde{R}_{j_r}(\widetilde{l}, t^0)$$

est un polynôme $\mathrm{Ad}^*\widetilde{G}$-invariant, qui n'est pas Ad^*G-invariant.

Par construction, ce polynôme est défini sur un ouvert dense $\widetilde{\mathcal{V}}$ de $\widetilde{\mathfrak{g}}^*$. Mais il peut bien sûr être étendu à $\widetilde{\mathfrak{g}}^*$ tout entier et devient alors $\mathrm{Ad}^*\widetilde{G}$-invariant, par continuité.

4.7.2 Le centre de l'algèbre enveloppante

Pour les détails concernant ce qui suit voir [C-G].

Soit $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ une base de $\mathfrak{g}$. Tout d'abord, fixons les notations.

Désignons par $\mathfrak{S}(\mathfrak{g})$ l'algèbre symétrique de $\mathfrak{g}$, i. e. l'algèbre tensorielle de $\mathfrak{g}$ modulo l'idéal engendré par les tenseurs de la forme

$$X \otimes Y - Y \otimes X \text{ avec } X, Y \in \mathfrak{g}.$$

On peut aussi la considérer comme l'algèbre commutative des polynômes en $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Notons $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$.

Il existe un isomorphisme linéaire entre $\mathfrak{S}(\mathfrak{g})$ et $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ défini par

$$S(Y_1 \cdots Y_r) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S(r)} Y_{\sigma(1)} \cdots Y_{\sigma(r)},$$

où $S(r)$ est le groupe symétrique sur $\{1, 2, \ldots, r\}$. On l'appelle **l'application de symétrisation**.

Dans la partie gauche de cette égalité, le produit est effectué dans $\mathfrak{S}(\mathfrak{g})$ alors que dans la partie droite le produit se fait dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Le groupe G et l'algèbre $\mathfrak{g}$ agissent d'une manière évidente sur $\mathfrak{S}(\mathfrak{g})$ et $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Ces actions seront encore notées par Ad et ad.

On a alors $\mathrm{Ad} \circ S = S \circ \mathrm{Ad}$.

Notons

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{g}) = \{P \in \mathfrak{S}(\mathfrak{g}) \mid (\mathrm{ad}X)P = 0, \forall X \in \mathfrak{g}\}$$

et

$$\mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) = \{A \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \mid (\mathrm{ad}X)A = XA - AX = 0, \forall X \in \mathfrak{g}\}$$

pour le centre de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Alors $S|_{\mathfrak{N}(\mathfrak{g})}$ est un isomorphisme d'algèbres sur $\mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$.

Pour chaque $Y \in \mathfrak{g}$ définissons

$$f_Y(l) = < l, Y >, \quad \forall l \in \mathfrak{g}^*.$$

Si on note $x_i = f_{X_i}$ pour les vecteurs de base $X_1, X_2, \ldots, X_n$, chaque polynôme $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ peut s'écrire d'une manière unique sous la forme

$$f = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha \quad \text{où, pour } \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),\ x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Ce polynôme correspond bien sûr à l'élément $\sum_\alpha c_\alpha X^\alpha$ de $\mathfrak{S}(\mathfrak{g})$, de plus $\mathfrak{S}(\mathfrak{g})$ et $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ peuvent être identifiés.

Finalement, grâce à l'isomorphisme linéaire entre $\mathfrak{S}(\mathfrak{g})$ et $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ donné par l'application de symétrisation, on obtient une bijection entre $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ et $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$, notée

$$W \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \mapsto P_W \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*].$$

Si l'action de G sur $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ est définie par

$$(\mathrm{Ad}g)f(l) = f(\mathrm{Ad}^*(g^{-1})l),$$

on voit que

$$(\mathrm{Ad}g)P_W = P_{(\mathrm{Ad}g)W}.$$

Définissons

$$\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]^G = \{f \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] \mid (\mathrm{ad}X)f = 0, \forall X \in \mathfrak{g}\} = \{f \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] \mid (\mathrm{Ad}g)f = f, \forall g \in G\}$$

l'algèbre des polynômes AdG-invariants sur $\mathfrak{g}^*$.

Donc $\mathfrak{N}(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ et $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]^G$ sont isomorphes d'après les relations expliquées précédemment.

Soient à présent $W \in \mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ et $\pi_l \in \widehat{G}$. Alors $d\pi_l(W)$ est scalaire sur $\mathfrak{H}_{\pi_l}^\infty$ et

$$d\pi_l(W) = P_W(-2\pi i l)\mathbb{I}.$$

Etant donné que $\widetilde{\mathfrak{g}}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, on peut considérer $\mathfrak{U}(\widetilde{\mathfrak{g}})$ comme un sous-ensemble G-invariant de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$.

On a les mêmes considérations pour $\mathfrak{S}(\widetilde{\mathfrak{g}})$ et $\mathfrak{S}(\mathfrak{g})$.

De plus, les polynômes sur $\widetilde{\mathfrak{g}}^*$ peuvent être identifiés avec les polynômes sur $\mathfrak{g}^*$, qui ne dépendent pas de la composante $l_n =< l, X_n >$.

On a ainsi, $\mathbb{C}[\widetilde{\mathfrak{g}}^*] \subset \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$.

En particulier, pour $W \in \mathfrak{U}(\widetilde{\mathfrak{g}})$, notons P_W aussi bien le polynôme associé à W dans $\mathbb{C}[\widetilde{\mathfrak{g}}^*]$, que dans $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$.

Comme $\widetilde{\mathfrak{g}}$ est un idéal dans $\mathfrak{g}$, le groupe G agit sur $\mathbb{C}[\widetilde{\mathfrak{g}}^*]$ comme sur $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$.

Rappelons qu'il existe $\widetilde{R} \in \mathbb{C}[\widetilde{\mathfrak{g}}^*] \subset \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ qui est $\mathrm{Ad}^*\widetilde{G}$-invariant, mais pas Ad^*G-invariant. Donc il existe $W \in \mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\widetilde{\mathfrak{g}})$ tel que $\widetilde{R} = P_W$ et $W \notin \mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$.

Ceci implique en particulier que $[X, W] \neq 0$.

Il est facile de voir que $[X, W] \in \mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\widetilde{\mathfrak{g}})$. Si $[X, W] \in \mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, on pose $Y = W$ et $0 \neq Z = [X, W] \in \mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Sinon on remplace W par $[X, W]$ et on répète l'argument précédent.

Compte tenu de la nilpotence, on trouve après un nombre fini d'étapes $0 \neq \widetilde{W} = [X, \ldots, [X, W] \ldots] \in \mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\widetilde{\mathfrak{g}})$ tel que $\widetilde{W} \notin \mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ et $0 \neq [X, \widetilde{W}] \in \mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$.

On pose alors $Y = \widetilde{W} \in \mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\widetilde{\mathfrak{g}})$, $0 \neq Z = [X, \widetilde{W}] \in \mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ et on a

$$[X, Y] = Z.$$

Cette dernière relation nous place dans **une situation de Kirillov généralisée**.

Comme $[X, Y] \in \mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$,

$$[X, \mathrm{Ad}(\exp(sX))Y] = [X, Y + sZ] = [X, Y] = Z, \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

$\mathrm{Ad}(\exp(sX))Y = Y + sZ \in \mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\widetilde{\mathfrak{g}})$ et on doit remplacer Y par $\mathrm{Ad}(\exp(sX))Y = Y + sZ$ avec un certain s approprié.

De plus,

$$\mathrm{Ad}(\exp(tX))P_Y = P_{\mathrm{Ad}(\exp(tX))Y} = P_{Y+tZ}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

et

$$d\pi_{\widetilde{l}}(Y) = P_Y(-2\pi i\widetilde{l})\mathbb{I}, \quad \forall \widetilde{l} \in \widetilde{\mathfrak{g}}^*.$$

Donc on a pour $l \in \mathfrak{g}^*$ et $\widetilde{l} = l|_{\widetilde{\mathfrak{g}}}$,

$$\begin{aligned} d\widetilde{\pi}_l(Y)\widetilde{\xi}(t, \widetilde{g}) &= d\pi_{\widetilde{l}}\big(\mathrm{Ad}(\exp(-tX))Y\big)\widetilde{\xi}(t, \cdot)(\widetilde{g}) \\ &= P_{\mathrm{Ad}(\exp(-tX))Y}(-2\pi i\widetilde{l})\widetilde{\xi}(t, \cdot)(\widetilde{g}) \\ &= P_{Y-tZ}(-2\pi i\widetilde{l})\widetilde{\xi}(t, \cdot)(\widetilde{g}) \end{aligned}$$

$$= \quad P_Y\big(-2\pi i \mathrm{Ad}^*(\exp tX)(\widetilde{l})\big)\widetilde{\xi}(t,\cdot)(\widetilde{g}).$$

Comme les actions sont nilpotentes,

$$Q(t,\widetilde{l}) := P_Y\big(-2\pi i \mathrm{Ad}^*(\exp tX)(\widetilde{l})\big)$$

est un polynôme en t et $\widetilde{l}$. De plus, il est $\widetilde{G}$-invariant, comme P_Y est $\widetilde{G}$-invariant et

$$\begin{aligned}
Q(t,\mathrm{Ad}^*(\widetilde{g})\widetilde{l}) &= P_Y\big(-2\pi i \mathrm{Ad}^*(\exp(tX))\mathrm{Ad}^*(\widetilde{g})(\widetilde{l})\big)\\
&= P_Y\big(-2\pi i [\mathrm{Ad}^*(\exp(tX)\cdot\widetilde{g}\cdot\exp(-tX))][\mathrm{Ad}^*(\exp(tX))(\widetilde{l})]\big)\\
&= P_Y\big(-2\pi i \mathrm{Ad}^*(\exp(tX))(\widetilde{l})\big)\\
&= Q(t,\widetilde{l}),
\end{aligned}$$

comme $\mathrm{Ad}^*(\exp(tX)\cdot\widetilde{g}\cdot\exp(-tX)) \in \widetilde{G}$. D'autre part le polynôme Q n'est pas G-invariant, en effet, dans ce cas P_Y serait aussi G-invariant et Y appartiendrait à $\mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, ce qui n'est pas le cas.

Le polynôme Q peut être caractérisé d'une manière plus précise :

Comme $[X,Y] = Z \in \mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$,

$$\begin{aligned}
d\widetilde{\pi}_l([X,Y])\widetilde{\xi}(t,\widetilde{g}) &= d\pi_l([X,Y])\xi\bigg(\exp(tX)\cdot\widetilde{g}\bigg)\\
&= P_{[X,Y]}(-2\pi i l)\xi\bigg(\exp(tX)\cdot\widetilde{g}\bigg)\\
&= P_{[X,Y]}(-2\pi i l)\widetilde{\xi}(t,\widetilde{g}),
\end{aligned}$$

où $P_{[X,Y]}$ est un polynôme G-invariant, indépendant de t.

D'autre part,

$$d\widetilde{\pi}_l([X,Y]) = d\widetilde{\pi}_l(X)d\widetilde{\pi}_l(Y) - d\widetilde{\pi}_l(Y)d\widetilde{\pi}_l(X)$$

avec

$$\begin{aligned}
d\widetilde{\pi}_l(Y)\widetilde{\xi}(t,\widetilde{g}) &= Q(t,\widetilde{l})\widetilde{\xi}(t,\widetilde{g})\\
d\widetilde{\pi}_l(X)\widetilde{\xi}(t,\widetilde{g}) &= \frac{d}{ds}\xi(\exp(-sX)\exp(tX)\widetilde{g})|_{s=0}\\
&= -\frac{\partial\widetilde{\xi}}{\partial t}(t,\widetilde{g}).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} d\widetilde{\pi}_l([X,Y])\widetilde{\xi}(t,\widetilde{g}) &= -\frac{\partial}{\partial t}[Q(t,\widetilde{l})\widetilde{\xi}(t,\widetilde{g})] - Q(t,\widetilde{l})\big(-\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{\xi}(t,\widetilde{g})\big) \\ &= -\frac{\partial Q}{\partial t}(t,\widetilde{l})\widetilde{\xi}(t,\widetilde{g}). \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$P_{[X,Y]}(-2\pi i l) = -\frac{\partial Q}{\partial t}(t,\widetilde{l}), \quad \widetilde{l} = l|_{\widetilde{\mathfrak{g}}}$$

est G-invariant et indépendant de t.

Le polynôme Q est par conséquent de degré 1 en t et est de la forme

$$Q(t,\widetilde{l}) = Q_0(\widetilde{l}) + Q_1(\widetilde{l})t,$$

où Q_0 et Q_1 sont des polynômes $\widetilde{G}$-invariants et où Q_1 est de plus G-invariant.

Le polynôme Q_0 ne peut pas être G-invariant, en effet, dans ce cas Q et P_Y seraient aussi G-invariants.

Le polynôme $Q_1(\widetilde{l})$ n'est pas identiquement nul. Sinon $Q(t,\widetilde{l}) = P_Y(-2\pi i \mathrm{Ad}^*(\exp(tX))(\widetilde{l}))$ serait indépendant de t et P_Y serait G-invariant, ce qui n'est pas le cas.

Posons

$$\widetilde{\mathcal{V}} = \{\widetilde{l} \in p(\mathcal{V}) \mid Q_1(\widetilde{l}) \neq 0\}.$$

Alors $\widetilde{\mathcal{V}}$ est un ouvert de Zariski dense G-invariant de $\widetilde{\mathfrak{g}}^*$.

Comme $Z \in \mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$,

$$d\pi_l(Z) = P_Z(-2\pi i l)\mathbb{I} = P_{[X,Y]}(-2\pi i l)\mathbb{I} = -Q_1(\widetilde{l})\mathbb{I}.$$

De plus, $Z \in \mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\widetilde{\mathfrak{g}})$ et donc

$$d\pi_{\widetilde{l}}(Z) = P_Z(-2\pi i\widetilde{l})\mathbb{I} = -Q_1(\widetilde{l})\mathbb{I},$$

car on a le même polynôme associé à Z dans $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ et dans $\mathbb{C}[\widetilde{\mathfrak{g}}^*]$.

Les éléments Y et Z de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ peuvent être choisis anti-hermitiens et tels que le polynôme $Q_1(\widetilde{l})$ soit non nul et imaginaire pur pour chaque $\widetilde{l}$.

En effet, rappelons que

$$\begin{aligned}
&X^* = -X \quad (\text{comme } X \in \mathfrak{g}) \\
&([U,V])^* = -[U^*, V^*], \quad \forall\, U, V \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})
\end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned}
&[X, Y^*] = Z^* \\
&[X, \frac{1}{2}(Y + Y^*] = \frac{1}{2}(Z + Z^*) \\
&[X, \frac{1}{2i}(Y - Y^*)] = \frac{1}{2i}(Z - Z^*).
\end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{2}(Z + Z^*)$ et $\frac{1}{2i}(Z - Z^*)$ sont des éléments auto-adjoints de $\mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$.

Un d'entre eux au moins est non nul, car $Z \neq 0$.

Si $\frac{1}{2}(Z + Z^*) \neq 0$, alors $\frac{1}{2}(Y + Y^*) \neq 0$ et $P_{\frac{1}{2}(Y+Y^*)} \not\equiv 0$ car, pour chaque $\widetilde{l} \in p(\mathcal{V})$, ouvert dense de $\widetilde{\mathfrak{g}}^*$, on a

$$d\pi_{\widetilde{l}}\big(\frac{1}{2}(Y + Y^*)\big) = P_{\frac{1}{2}(Y+Y^*)}(-2\pi i\widetilde{l}) \cdot \mathbb{I}.$$

Comme, en général, $P_{U^*}(-2\pi i\widetilde{l}) = \overline{P_U(-2\pi i\widetilde{l})}$ pour chaque $U \in \mathfrak{U}(\widetilde{\mathfrak{g}})$, pour chaque $\widetilde{l} \in \widetilde{\mathfrak{g}}^*$, et comme $\frac{1}{2}(Y + Y^*)$ est un élément auto-adjoint de $\mathfrak{U}(\widetilde{\mathfrak{g}})$, $P_{\frac{1}{2}(Y+Y^*)}(-2\pi i\widetilde{l})$ doit être réel. Dans ce cas, on remplace Y par $\frac{i}{2}(Y + Y^*)$ et Z par $\frac{i}{2}(Z + Z^*)$.

On les appellera encore Y et Z.

Ceci prouve que dans ce cas on peut supposer Y, Z anti-hermitiens et $P_Y(-2\pi i\widetilde{l})$ imaginaire pur pour chaque $\widetilde{l}$, comme $P_{-2\pi iW} = -2\pi i P_W$ pour tout $W \in \mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\widetilde{\mathfrak{g}})$.

Si $\frac{1}{2i}(Z - Z^*) \neq 0$, on procède de la même manière.

Ainsi, dans la suite on supposera que Y est anti-hermitien tel que $P_Y(-2\pi i\widetilde{l})$ soit imaginaire pur.

Donc

$$Q(t, \widetilde{l}) = P_Y(-2\pi i \mathrm{Ad}^*(\exp tX)(\widetilde{l})) = Q_0(\widetilde{l}) + Q_1(\widetilde{l})t$$

est imaginaire pur pour tout t et tout $\widetilde{l}$.

D'où $Q_0(\widetilde{l})$ (si non nul) et $Q_1(\widetilde{l})$ sont imaginaires purs pour tout $\widetilde{l}$.

Remarquons que si $Y, Z \in \mathfrak{g}$ (comme dans le cas du groupe de Heisenberg), alors ils sont anti-hermitiens et $P_Y(-2\pi il)$, $Q_0(\widetilde{l})$ (si non nuls), $Q_1(\widetilde{l})$ sont en effet imaginaires purs.

Le polynôme Q_1 défini dans la section précédente est un polynôme sur $\widetilde{\mathfrak{g}}^*$, qui est invariant pour l'action de G sur $\widetilde{\mathfrak{g}}^*$. Mais il peut aussi être considéré comme un polynôme sur $\mathfrak{g}^*$ qui ne dépend pas de la dernière coordonnée, en définissant $Q_1(l) = Q_1(\widetilde{l})$, où $\widetilde{l} = p(l) = l|_{\widetilde{\mathfrak{g}}}$.

Il est facile de montrer que pour chaque $g \in G$,

$$p\Big[\mathrm{Ad}^*(g)(l)\Big] = \Big[\mathrm{Ad}^*(g)(l)\Big]|_{\widetilde{\mathfrak{g}}} = \mathrm{Ad}^*(g)(\widetilde{l}) = \mathrm{Ad}^*(g)(p(l)),$$

où $\mathrm{Ad}^*(g)$ désigne l'action de G sur $\mathfrak{g}^*$ du côté gauche et l'action de G sur $\widetilde{\mathfrak{g}}^*$ du côté droit.

Ainsi

$$\begin{aligned} Q_1(\mathrm{Ad}^*(g)(l)) &= Q_1\big([\mathrm{Ad}^*(g)(l)]|_{\widetilde{\mathfrak{g}}}\big) \\ &= Q_1\big(\mathrm{Ad}^*(g)(\widetilde{l})\big) \\ &= Q_1(\widetilde{l}) \\ &= Q_1(l), \end{aligned}$$

i.e., Q_1 est G-invariant, même si on le considère comme un polynôme sur $\mathfrak{g}^*$.

Etudions plus précisément le centre le l'algèbre enveloppante.

Pour tout $k \in R = \{i_1, \ldots, i_d\}$, il existe $Y_k \in \mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{k-1})$ tel que

$$0 \neq Z_k = [X_k, Y_k] \in \mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_k).$$

On doit prouver que l'on peut en fait prendre $Y_k \in \mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{k-1})$ tel que

$$0 \neq Z_k = [X_k, Y_k] \in \mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\mathfrak{g}).$$

Pour ce faire, remarquons les faits suivants :

(i) Comme $\mathfrak{g}$ est nilpotente et comme on commence par une suite de Jordan-Hölder, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_k] \subset \mathfrak{g}_{k-1}$.

(ii) Si $\widetilde{\mathfrak{g}}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, alors $(\mathfrak{U}(\widetilde{\mathfrak{g}}), [\cdot,\cdot])$ est un idéal dans $(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}), [\cdot,\cdot])$.

En particulier, tous les $(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_k), [\cdot,\cdot])$ sont des idéaux dans $(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}), [\cdot,\cdot])$.

(iii) Si $\widetilde{\mathfrak{g}}$ est un idéal dans $\mathfrak{g}$, alors $(\mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\widetilde{\mathfrak{g}}), [\cdot,\cdot])$ est un idéal dans $(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}), [\cdot,\cdot])$.

En particulier, $(\mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_k), [\cdot,\cdot])$ est un idéal dans $(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}), [\cdot,\cdot])$ pour tout k.

En effet, soient $Z \in \mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\widetilde{\mathfrak{g}})$, $X \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ et $U \in \mathfrak{U}(\widetilde{\mathfrak{g}})$. Alors

$$\begin{aligned} \big[[X,Z],U\big] &= -\big[[Z,U],X\big] - \big[[U,X],Z\big] \\ &= 0, \end{aligned}$$

comme $Z \in \mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\widetilde{\mathfrak{g}})$ et comme $U, [U,X] \in \mathfrak{U}(\widetilde{\mathfrak{g}})$, or $\mathfrak{U}(\widetilde{\mathfrak{g}})$ est un idéal dans $(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}), [\cdot,\cdot])$.

Ce qui montre que $\mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\widetilde{\mathfrak{g}})$ est un idéal dans $(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}), [\cdot,\cdot])$.

Supposons à présent que $Y_k \in \mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{k-1})$ tel que $0 \neq [X_k, Y_k] = Z_k \in \mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_k)$ et montrons que l'on peut choisir Y_k tel que $0 \neq [X_k, Y_k] \in \mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$.

En effet, si $Z_k = [X_k, Y_k] \notin \mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, alors il existe $W \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ tel que

$$0 \neq [W, Z_k] = \big[W, [X_k, Y_k]\big] = -\big[X_k, [Y_k, W]\big] - \big[Y_k, [W, X_k]\big] = \big[X_k, [W, Y_k]\big],$$

comme $[W, X_k] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_k] \subset \mathfrak{g}_{k-1}$ et comme $Y_k \in \mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{k-1})$.

De plus $[W, Y_k]$ et $\big[X_k, [W, Y_k]\big]$ appartiennent à $\mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{k-1})$ car $\mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{k-1})$ est un idéal.

Si $0 \neq \big[X_k, [W, Y_k]\big] \notin \mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, on recommence avec cette procédure.

D'après la nilpotence, il existe $W_1, W_2, \ldots, W_r \in \mathfrak{g}$ tels que $0 \neq [W_1, [W_2, \ldots [W_r, Y_k] \ldots]] \in \mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{k-1})$ et

$$0 \neq \big[X_k, [W_1, [W_2, \ldots [W_r, Y_k] \ldots]]\big] \in \mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\mathfrak{g}).$$

Ainsi on écrit Y_k à la place de $[W_1, [W_2, \ldots [W_r, Y_k] \ldots]]$

et Z_k à celle de $\big[X_k, [W_1, [W_2, \ldots [W_r, Y_k] \ldots]]\big]$

ainsi notre résultat est prouvé.

En conclusion, pour chaque $k \in R = \{i_1, \ldots, i_d\}$, il existe Q_k, $Q_{0,k}$ et $Q_{1,k}$ tels que

$$Q_k(t, l_{k-1}) = P_{Y_k}(-2\pi i \mathrm{Ad}^*(\exp tX_k)(l_{k-1})) = Q_{0,k}(l_{k-1}) + Q_{1,k}(l_{k-1})t.$$

Ici $Q_{0,k}$ et $Q_{1,k}$ sont des polynômes sur $\mathfrak{g}_{k-1}^*$, mais ils peuvent être considérés comme des polynômes sur $\mathfrak{g}^*$ qui ne dépendent pas des $n-k+1$ dernières coordonnées de l. De plus, $Q_{1,k}(l)$ est un polynôme G-invariant car

$$Q_{1,k}(l) = Q_{1,k}(l_k) = -P_{[X_k,Y_k]}(-2\pi i l_k)$$

et $[X_k, Y_k] \in \mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Comme auparavant, ils peuvent être choisis imaginaires purs et Y_k, Z_k supposés anti-hermitiens.

Finalement, si on définit $R_k = -2\pi i Q_{1,k}$, alors $R_1, R_2, \ldots, R_d$ sont les polynômes G-invariants du théorème 4.1 et $\mathcal{W}$, $\mathcal{A}_\varepsilon$ peuvent être définis comme dans le théorème 4.1. Les polynômes R_k dépendent uniquement des coordonnées de $l_{k-1} = l|_{\mathfrak{g}_{k-1}}$.

4.8 Récurrence dans le cas de la saturation des orbites

4.8.1 Construction d'éléments particuliers de l'algèbre enveloppante

Utilisons les notations de la section 4.4.2, où $\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}_{n-1}$ et supposons que nous sommes dans la situation du cas I, i.e., dans la situation de Kirillov généralisée.

Soit $\varepsilon \in \{-1, 1\}^d$ tel que $\mathcal{A}_\varepsilon \neq \emptyset$ et écrivons :

$$\widetilde{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{d-1}) \text{ si } \varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{d-1}, \varepsilon_d) \text{ pour un certain } \varepsilon_d.$$

Comme on est dans la situation du cas I, $i_d = n$ et $\widetilde{\varepsilon}$ correspond à la restriction de $\mathfrak{g}$ à $\widetilde{\mathfrak{g}}$.

Par construction,

$$\emptyset \neq \widetilde{\mathcal{A}}_{\widetilde{\varepsilon}} = p(\mathcal{A}_\varepsilon) \subset \{\widetilde{l} \in \widetilde{\mathcal{W}} \mid \varepsilon_j R_j(\widetilde{l}) > 0, 1 \leq j \leq d-1\ \} \neq \emptyset.$$

Supposons que les résultats du théorème 4.1 sont vrais pour $\widetilde{\mathfrak{g}}$.

Soient $U_{i,\widetilde{\varepsilon}} \in \mathfrak{U}(\widetilde{\mathfrak{g}})$, $i \in \{1, 2, \ldots, d-1\}$ donnés par l'hypothèse de récurrence correspondant à $\widetilde{\mathcal{A}}_{\widetilde{\varepsilon}}$.

Comme toutes les actions sont polynômiales, on a une relation de la forme

$$\mathrm{Ad}(\exp(tX))(U_{i,\widetilde{\varepsilon}}) = \sum_{j=0}^{N_i} (-t)^j U_{ij}$$

avec $U_{ij} \in \mathfrak{U}(\widetilde{\mathfrak{g}})$ pour tout i, j.

Définissons à présent

$$V_{i,\varepsilon} = \sum_{j=0}^{N_i} U_{ij} Y^j Z^{N_i - j} \in \mathfrak{U}(\widetilde{\mathfrak{g}}), \quad i \in \{1, 2, \dots, d-1\}.$$

Donc

$$\mathrm{Ad}(\exp(-tX))(Y^j Z^{N_i-j}) = (Y - tZ)^j Z^{N_i-j}$$

et

$$\mathrm{Ad}\Big(\exp(-tX)\Big)(V_{i,\varepsilon}) = \sum_{j=0}^{N_i} \Big(\mathrm{Ad}\big(\exp(-tX)\big)(U_{ij})\Big)(Y - tZ)^j Z^{N_i-j}.$$

L'élément $V_{d,\varepsilon}$ sera construit plus tard.

4.8.2 Choix de points particuliers sur chaque orbite

Reprenons les notations précédentes. Pour chaque $\widetilde{l} \in \widetilde{\mathcal{W}} = p(\mathcal{W})$, il existe exactement un seul $t = t(\widetilde{l}) \in \mathbb{R}$ tel que

$$d\pi_{\mathrm{Ad}^*(\exp(tX))(\widetilde{l})}(Y) = 0,$$

avec $\mathrm{Ad}^*(\exp(tX))(\widetilde{l}) \in \widetilde{\mathfrak{g}}^*$.

En effet,

$$d\pi_{\mathrm{Ad}^*(\exp(tX))(\widetilde{l})}(Y) = P_Y\big(i\mathrm{Ad}^*(\exp(tX))(\widetilde{l})\big)\mathbb{I} = [Q_0(\widetilde{l}) + Q_1(\widetilde{l})t]\mathbb{I}.$$

D'où

$$t = t(\widetilde{l}) = -\frac{Q_0(\widetilde{l})}{Q_1(\widetilde{l})}$$

donne le résultat voulu.

De plus, $t = t(\widetilde{l})$ est $\widetilde{G}$-invariant.

Par la même remarque que précédemment, t peut être considéré comme une application définie sur $\mathcal{W} \subset \mathfrak{g}^*$ qui ne dépend pas des dernières coordonnées. L'application

$$\mathcal{W} \ \rightarrow \ \mathbb{R}$$

$$l \quad \mapsto \quad t(l) = -\frac{Q_0(l)}{Q_1(l)}$$

est $\mathcal{C}^\infty$, en tant que fonction rationnelle définie sur tout $\mathcal{W}$.

Définissons l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{W} & \to & \mathcal{W} \\ l & \mapsto & l_1 = \mathrm{Ad}^*(\exp(t(l)X))(l). \end{array}$$

Cette application est bien sûr $\mathcal{C}^\infty$.

En effet, les coordonnées de l_1 sont des fonctions rationnelles des coordonnées de l, les dénominateurs étant des puissances de $Q_1(l)$. L'image l_1 de l appartient à l'orbite de l. Posons $\widetilde{l_1} = l_1|_{\widetilde{\mathfrak{g}}}$.

Alors, par construction,

$$\widetilde{l_1} = p(\mathrm{Ad}^*(\exp(tX))(l)) = \mathrm{Ad}^*(\exp(tX))(p(l)) = \mathrm{Ad}^*(\exp(tX))(\widetilde{l})$$

et

$$d\pi_{\widetilde{l_1}}(Y) = d\pi_{\mathrm{Ad}^*(\exp(tX))(\widetilde{l})}(Y) = 0.$$

En particulier,

$$0 = P_Y(i\widetilde{l_1}) = Q(0, \widetilde{l_1}) = Q_0(\widetilde{l_1})$$

et

$$d\widetilde{\pi}_{l_1}(Y)\widetilde{\xi}(t, \widetilde{g}) = P_Y(i\mathrm{Ad}^*\big(\exp(tX)\big)(\widetilde{l_1}))\widetilde{\xi}(t, \cdot)(\widetilde{g}) = Q_1(l_1)t \cdot \widetilde{\xi}(t, \widetilde{g}) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall \widetilde{g} \in \widetilde{G},$$

car $Q_1(l_1) = Q_1(\widetilde{l_1})$ par définition.

De plus, $Q_1(l_1) = Q_1(l) \neq 0$, car Q_1 est G-invariant.

4.8.3 Construction par récurrence pour ces points particuliers

Pour $\widetilde{l_1}$, on a

$$d\pi_{\widetilde{l_1}}\big(\mathrm{Ad}(\exp(-tX))(Y^j Z^{N_i - j})\big) = (-1)^{N_i} Q_1(l)^{N_i} (-t)^j \mathbb{I} = C_i (-t)^j \mathbb{I}$$

où $C_i = (-1)^{N_i} Q_1(l)^{N_i}$, car $d\pi_{\widetilde{l_1}}(Y) = 0$ et $d\pi_{\widetilde{l_1}}(Z) = -Q_1(l_1)\mathbb{I} = -Q_1(l)\mathbb{I}$.

Alors

$$d\pi_{\widetilde{l}_1}\big(\mathrm{Ad}(\exp(-tX))V_{i,\varepsilon}\big) = \sum_{j=0}^{N_i} C_i(-t)^j d\pi_{\widetilde{l}_1}\big(\mathrm{Ad}(\exp(-tX))U_{ij}\big)\mathbb{I} = C_i d\pi_{\widetilde{l}_1}(U_{i,\widetilde{\varepsilon}}), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Pour chaque forme linéaire $\widetilde{l} \in \widetilde{\mathfrak{g}}^*$,

notons $\widetilde{\mathfrak{b}}(\widetilde{l})$ la polarisation de Vergne, $\widetilde{B}(l) = \exp(\widetilde{\mathfrak{b}}(\widetilde{l}))$ et $\xi_{\widetilde{l}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d-1}) \equiv \mathfrak{H}^\infty_{\pi_{\widetilde{l}}}$, pour les fonctions obtenues par le théorème 4.1 (ii) d'après l'hypothèse de récurrence, en tenant compte des choix ultérieurs de base.

Par récurrence, le point (v) du théorème 4.1 donne,

$$\bigcap_{j=1}^{d-1} \mathrm{Ker} d\pi_{\widetilde{l}}(U_{j,\widetilde{\varepsilon}}) = \mathbb{C}\xi_{\widetilde{l}}, \quad \forall \widetilde{l} \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\widetilde{\varepsilon}}$$

et

$$\bigcap_{j=1}^{d-1} \mathrm{Ker} d\pi_{\widetilde{l}}(U_{j,\widetilde{\varepsilon}}) = \{0\}, \quad \forall l \in \widetilde{\mathcal{W}} \setminus \widetilde{\mathcal{A}}_{\widetilde{\varepsilon}}$$

où $\widetilde{\mathcal{W}} = p(\mathcal{W})$. Pour $l_1, \widetilde{l}_1$ construits ici, soit $\eta_{l_1} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (à déterminer plus tard) et définissons $\widetilde{\xi}_{l_1} = \eta_{l_1} \otimes \xi_{\widetilde{l}_1} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \equiv \mathfrak{H}^\infty_{\widetilde{\pi}_{l_1}}$.

D'où

$$d\widetilde{\pi}_{l_1}(V_{i,\varepsilon})\widetilde{\xi}_{l_1}(t,\widetilde{g}) = d\pi_{\widetilde{l}_1}(\mathrm{Ad}(\exp(-tX))V_{i,\varepsilon})\eta_{l_1} \otimes \xi_{\widetilde{l}_1}(t,\widetilde{g}) = C_i\eta_{l_1}(t) d\pi_{\widetilde{l}_1}(U_{i,\widetilde{\varepsilon}})\xi_{\widetilde{l}_1}(\widetilde{g}) = 0$$

où $t \in \mathbb{R}$, $\widetilde{g} \in \widetilde{G}$, $i \in \{1, 2, \ldots, d-1\}$.

Dans le cas I, la dimension des orbites de dimension maximale augmente de deux quand on passe de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ à $\mathfrak{g}$ et ainsi on doit introduire une relation supplémentaire.

Considérons $V_{d,\varepsilon} = X - i\varepsilon_d Y \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$.

Ainsi

$$\begin{aligned} d\widetilde{\pi}_{l_1}(X - i\varepsilon_d Y)\widetilde{\xi}_{l_1}(t,\widetilde{g}) &= \big(-\frac{\partial}{\partial t} - i\varepsilon_d Q_1(l_1)t\big)\widetilde{\xi}_{l_1}(t,\cdot)(\widetilde{g}) \\ &= \xi_{\widetilde{l}_1}(\widetilde{g})\big(-\frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon_d R_d(l_1)t\big)\eta_{l_1}(t). \end{aligned}$$

On doit donc poser

$$\eta_{l_1}(t) = e^{-\frac{1}{2}\varepsilon_d R_d(l_1)t^2}$$

pour avoir

$$d\widetilde{\pi}_{l_1}(X - i\varepsilon_d Y)\widetilde{\xi}_{l_1} = 0.$$

Si on définit $\xi_{l_1} \in \mathfrak{H}^\infty_{\pi_{l_1}}$ $(\equiv \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$ par $\xi_{l_1}(\exp(tX) \cdot \widetilde{g}) = \widetilde{\xi}_{l_1}(t, \widetilde{g})$, alors

$$d\pi_{l_1}(V_{i,\varepsilon})\xi_{l_1} = 0 \quad \text{pour } i \in \{1, \dots, d\},$$

où $V_{d,\varepsilon} = X - i\varepsilon_d Y$.

On procède de même pour les fonctions ζ_{k,l_1}, $k \in \{1, \dots, d-1\}$ du théorème 4.1 (iii). Les fonctions $\zeta_{d,l_1} \in \mathfrak{H}^\infty_{\pi_{l_1}}$ et $\widetilde{\zeta}_{d,l_1} \in \mathfrak{H}^\infty_{\widetilde{\pi}_{l_1}}$ sont obtenues par

$$\widetilde{\zeta}_{d,l_1} = \varphi_{l_1} \otimes \xi_{\widetilde{l}_1},$$

où $\varphi_{l_1} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est une fonction de Schwartz telle que $\big(-\dfrac{\partial}{\partial t} - \varepsilon_d R_d(l_1)t\big)\varphi_{l_1}(t) \neq 0$.

Pour prouver la partie (v) du théorème 4.1 pour l_1 (associée à l choisi arbitraire par conjugaison, comme expliqué précédemment), supposons que $\psi_{l_1} \in \mathfrak{H}^\infty_{\pi_{l_1}} \equiv \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\psi_{l_1} \in \displaystyle\bigcap_{j=1}^{d} \mathrm{Ker} d\pi_{l_1}(V_{j,\varepsilon})$.

Définissons $\widetilde{\psi}_{l_1}$ par $\widetilde{\psi}_{l_1}(t, \widetilde{g}) = \psi_{l_1}((\exp tX \cdot \widetilde{g})$.

On a en particulier

$$\begin{aligned} d\pi_{l_1}(X - i\varepsilon_d Y)\psi_{l_1}((\exp tX) \cdot \widetilde{g}) &= d\widetilde{\pi}_{l_1}(X - i\varepsilon_d Y)\widetilde{\psi}_{l_1}(t, \widetilde{g}) \\ &= \left(-\frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon_d R_d(l_1)t\right)\widetilde{\psi}_{l_1}(t, \cdot)(\widetilde{g}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{\psi}_{l_1}(t, \widetilde{g}) = -\varepsilon_d R_d(l_1)t\widetilde{\psi}_{l_1}(t, \widetilde{g}).$$

Si $l \in \mathcal{A}_\varepsilon$, $l_1 \in \mathcal{A}_\varepsilon$ et $\varepsilon_d R_d(l_1) > 0$. Alors

$$\psi_{l_1}((\exp tX) \cdot \widetilde{g}) = \widetilde{\psi}_{l_1}(t, \widetilde{g}) = C(l_1, \widetilde{g})e^{-\frac{1}{2}\varepsilon_d R_d(l_1)t^2},$$

où $C(l_1, \widetilde{g}) = C_{l_1}(\widetilde{g})$ est une fonction de Schwartz dans $\widetilde{g}$ qui satisfait

$$d\pi_{\widetilde{l}_1}(U_{j,\widetilde{\varepsilon}})C_{l_1}(\widetilde{g}) = 0, \quad j = 1, \dots, d-1.$$

Par hypothèse de récurrence, $C_{l_1}(\widetilde{g}) = C(l_1)\xi_{\widetilde{l}_1}(\widetilde{g})$ et

$$\psi_{l_1} = C(l_1)\eta_{l_1} \otimes \xi_{\widetilde{l}_1} = C(l_1)\xi_{l_1} \in \mathbb{C}\xi_{l_1}.$$

Si $l \notin \mathcal{A}_\varepsilon$, $l_1 \notin \mathcal{A}_\varepsilon$ alors on obtient $\varepsilon_d R_d(l_1) < 0$ où $\widetilde{l}_1 = p(l_1) \notin \widetilde{\mathcal{A}}_{\widetilde{\varepsilon}}$.
Dans le cas où $\varepsilon_d R_d(l_1) < 0$, l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{\psi}_{l_1}(t, \widetilde{g}) = -\varepsilon_d R_d(l_1) t \widetilde{\psi}_{l_1}(t, \widetilde{g})$$

n'admet pas de solution de Schwartz non nulle et

$$\bigcap_{j=1}^{d} \mathrm{Ker} d\pi_{l_1}(V_{j,\varepsilon}) = \bigcap_{j=1}^{d} \mathrm{Ker} d\widetilde{\pi}_{l_1}(V_{j,\varepsilon}) = \{0\}.$$

Dans le cas où $\varepsilon_d R_d(l_1) > 0$ et $\widetilde{l}_1 = p(l_1) \notin \widetilde{\mathcal{A}}_{\widetilde{\varepsilon}}$,

$$\bigcap_{j=1}^{d-1} \mathrm{Ker} d\pi_{\widetilde{l}_1}(U_{j,\widetilde{\varepsilon}}) = \{0\}, \text{ par hypothèse de récurrence.}$$

Donc, si on reprend le raisonnement du cas où $l \in \mathcal{A}_\varepsilon$, le système

$$d\pi_{\widetilde{l}_1}(U_{j,\widetilde{\varepsilon}}) C_{l_1}(\widetilde{g}) = 0, \quad j = 1, \ldots, d-1,$$

avec $C_{l_1}(\widetilde{g})$ fonction de Schwartz, implique que $C_{l_1} = 0$ et donc $\psi_{l_1} = 0$.
Ce qui prouve que si $l \notin \mathcal{A}_\varepsilon$, alors

$$\bigcap_{j=1}^{d} \mathrm{Ker} d\pi_{l_1}(V_{j,\varepsilon}) = \{0\}.$$

Donc pour chaque $l \in \mathcal{W}$, il existe $l_1 \in \Omega_l$ pour lequel le théorème 4.1 est satisfait. Il faut maintenant compléter la construction pour toute forme linéaire $l \in \mathcal{W}$.

4.8.4 Construction pour chaque point dans un ouvert dense

Donnons nous à présent une forme linéaire $l \in \mathcal{W}$.

Par définition de l_1, $l = \mathrm{Ad}^*(\exp(-t(l)X)(l_1)$, où $t(l)$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur l dans $\mathcal{W}$.

Si on écrit $\mathfrak{b}(l)$ et $\mathfrak{b}(l_1)$ pour les polarisations de Vergne en l et en l_1 respectivement (pour la suite Jordan-Hölder fixée), alors $\mathfrak{b}(l) = \mathrm{Ad}(\exp(-t(l)X))(\mathfrak{b}(l_1))$.

Les représentations π_l et π_{l_1} sont unitairement équivalentes, l'équivalence entre les espaces de représentation étant donnée par

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{H}_{\pi_{l_1}} & \to & \mathfrak{H}_{\pi_l} \\ \varphi_{l_1} & \mapsto & \varphi_l \end{array}$$

où

$$\varphi_l(g) = \varphi_{\mathrm{Ad}^*(\exp(-t(l)X)(l_1)}(g) = \varphi_{l_1}(g \cdot \exp(-t(l)X))$$

avec $l_1 = \mathrm{Ad}^*(\exp(t(l)X)(l)$.

Ce qui conduit à définir ξ_l par la formule

$$\xi_l(g) = \xi_{\mathrm{Ad}^*(\exp(-t(l)X)(l_1)}(g) = \xi_{l_1}(g \cdot \exp(-t(l)X))$$

avec $l_1 = \mathrm{Ad}^*(\exp(t(l)X)(l)$, où la fonction ξ_{l_1} est définie plus-haut. Ainsi les fonctions ξ_l ont été construites pour chaque $l \in \mathcal{W}$. Il est facile de voir qu'elles vérifient la relation

$$\xi_{\mathrm{Ad}^*(u)(l)}(g) = \xi_l(g \cdot u), \quad \forall u, g \in G.$$

D'après l'équivalence unitaire, on obtient que

$$\bigcap_{j=1}^{d} \mathrm{Ker} d\pi_l(V_{j,\varepsilon}) = \mathbb{C}\xi_l, \quad \forall l \in \mathcal{A}_\varepsilon,$$

et

$$\bigcap_{j=1}^{d} \mathrm{Ker} d\pi_l(V_{j,\varepsilon}) = \{0\}, \quad \forall l \in \mathcal{W} \setminus \mathcal{A}_\varepsilon.$$

On procède de la même manière pour les fonctions $\zeta_{l,k}$.

4.8.5 Certaines questions de continuité

L'application

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{W} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ l & \mapsto & t(l) \end{array}$$

est rationnelle, donc continue et même $\mathcal{C}^\infty$.

Remarquons que $t(l) = -\frac{Q_0(l)}{Q_1(l)}$ est réel pour tout $l \in \mathcal{W}$, car $Q_0(l)$ et $Q_1(l)$ sont tous deux imaginaires purs.

D'où

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{W} & \rightarrow & \mathcal{W} \\ l & \mapsto & l_1 = \mathrm{Ad}^*\Big(\exp(t(l)X)\Big)(l) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{W} & \rightarrow & \widetilde{\mathcal{W}} = p(\mathcal{W}) \\ l & \mapsto & \widetilde{l}_1 = p(l_1) = l_1|_{\widetilde{\mathfrak{g}}} \end{array}$$

sont aussi $\mathcal{C}^\infty$.

Par hypothèse de récurrence, l'application

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\mathcal{A}}_{\widetilde{\varepsilon}} & \rightarrow & \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d-1}) \equiv \mathfrak{H}^\infty_{\pi_{\widetilde{l}}} \\ \widetilde{l} & \mapsto & \xi_{\widetilde{l}} \end{array}$$

est $\mathcal{C}^\infty$ au sens de la définition 4.1. De plus,

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{W} & \rightarrow & \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ l & \mapsto & \eta_l \end{array}$$

définie par $\eta_l(t) = e^{-\frac{1}{2}\varepsilon_d R_d(l) t^2}$ est une application $\mathcal{C}^\infty$.

Donc

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}_\varepsilon & \rightarrow & \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \equiv \mathfrak{H}^\infty_{\pi_l} \\ l & \mapsto & \xi_{l_1} \end{array}$$

définie par

$$\xi_{l_1}(\exp(tX)\cdot\widetilde{g}) = \eta_{l_1}(t)\cdot\xi_{\widetilde{l_1}}(\widetilde{g})$$

est $\mathcal{C}^\infty$.

En conclusion,

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}_\varepsilon & \to & \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \\ l & \mapsto & \xi_l \end{array}$$

est $\mathcal{C}^\infty$, car

$$\xi_l(\exp(sX)\cdot\widetilde{g}) = \xi_{\mathrm{Ad}^*(\exp(-t(l)X))(l_1)}(\exp(sX)\cdot\widetilde{g}) = \xi_{l_1}(\exp(sX)\cdot\widetilde{g}\cdot\exp(-t(l)X)).$$

On a les mêmes résultats pour les fonctions $\zeta_{k,l}$ si on choisit les φ_{l_1} telles que $l_1\mapsto\varphi_{l_1}$ est $\mathcal{C}^\infty$.

4.9 Le cas de la non-saturation des orbites

Dans ce cas, les polarisations de Vergne $\mathfrak{b}(l)$, pour $l\in\mathcal{W}$ dans $\mathfrak{g}$, et $\widetilde{\mathfrak{b}}(\widetilde{l})$, pour $\widetilde{l} = l|_{\widetilde{\mathfrak{g}}}$ dans $\widetilde{\mathfrak{g}}$, vérifient $\widetilde{\mathfrak{b}}(\widetilde{l}) = \mathfrak{b}(l)\cap\widetilde{\mathfrak{g}}$.

On choisit la même base coexponentielle à $\mathfrak{b}(l)$ dans $\mathfrak{g}$ et à $\widetilde{\mathfrak{b}}(\widetilde{l})$ dans $\widetilde{\mathfrak{g}}$.

Pour ce choix de base,

$$G/B(l)\equiv\widetilde{G}/\widetilde{B}(\widetilde{l})\equiv\mathbb{R}^d.$$

Les espaces de représentation $\mathfrak{H}_{\pi_l}$ et $\mathfrak{H}_{\pi_l}^\infty$ (respectivement $\mathfrak{H}_{\pi_{\widetilde{l}}}$ et $\mathfrak{H}_{\pi_{\widetilde{l}}}^\infty$) peuvent être identifiés avec $L^2(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, avec les conditions de covariance appropriées.

Pour $\xi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\equiv\mathfrak{H}_{\pi_l}^\infty\equiv\mathfrak{H}_{\pi_{\widetilde{l}}}^\infty$ et pour chaque $U\in\widetilde{\mathfrak{g}}\subset\mathfrak{g}$:

$$\begin{array}{rcl} d\pi_l(U)\xi(s_1,\ldots,s_d) & = & d\pi_l(U)\xi(\exp(s_dX_{j_d})\cdots\exp(s_1X_{j_1})) \\ & = & \dfrac{d}{dt}\xi(\exp(-tU)\exp(s_dX_{j_d})\cdots\exp(s_1X_{j_1}))|_{t=0} \\ & = & d\pi_{\widetilde{l}}(U)\xi(s_1,\ldots,s_d). \end{array}$$

En fait, comme $U\in\widetilde{\mathfrak{g}}\subset\mathfrak{g}$, $X_{j_1},\ldots,X_{j_d}\in\widetilde{\mathfrak{g}}\subset\mathfrak{g}$, $\widetilde{\mathfrak{b}}(\widetilde{l})\subset\mathfrak{b}(l)$, on a dans ce cas la même relation de covariance si on identifie $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ à $\mathfrak{H}_{\pi_l}^\infty$ ou à $\mathfrak{H}_{\pi_{\widetilde{l}}}^\infty$.

De la même manière, pour $U\in\mathfrak{U}(\widetilde{\mathfrak{g}})\subset\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, $d\pi_l(U)\xi = d\pi_{\widetilde{l}}(U)\xi$, pour toute $\xi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Comme

$$\begin{aligned} d &= \max\{\ \dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{b}) \mid \exists l \in \mathfrak{g}^* \text{ tel que } \mathfrak{b} = \mathfrak{b}(l) \ \text{ est une polarisation en } l \text{ dans } \mathfrak{g}\ \} \\ &= \max\{\ \dim(\widetilde{\mathfrak{g}}/\widetilde{\mathfrak{b}}) \mid \exists \widetilde{l} \in \widetilde{\mathfrak{g}}^* \text{ tel que } \widetilde{\mathfrak{b}} = \widetilde{\mathfrak{b}}(\widetilde{l}) \ \text{ est une polarisation en } \widetilde{l} \text{ dans } \widetilde{\mathfrak{g}}\ \}, \end{aligned}$$

le nombre des relations de la forme $d\pi(U)\xi = 0$ dans le théorème 4.1 doit être le même pour G et $\widetilde{G}$.

De plus, pour chaque $\varepsilon \in \{-1, 1\}^d$, les ensembles $\mathcal{A}_\varepsilon$, respectivement $\widetilde{\mathcal{A}}_\varepsilon$ sont reliés par

$$\widetilde{\mathcal{A}}_\varepsilon = p(\mathcal{A}_\varepsilon) = \{\ \widetilde{l} \in \widetilde{g}^* \mid \exists l \in \mathcal{A}_\varepsilon \text{ tel que } \widetilde{l} = l|_{\widetilde{\mathfrak{g}}}\ \},$$

car n n'est pas un indice saut dans ce cas.

Par hypothèse de récurrence, il existe $V_{1,\varepsilon}, \ldots, V_{d,\varepsilon} \in \mathfrak{U}(\widetilde{\mathfrak{g}}) \subset \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ et une application $\mathcal{C}^\infty$

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{A}}_\varepsilon &\to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \\ \widetilde{l} &\mapsto \xi_{\widetilde{l}} \end{aligned}$$

telle que

$$\begin{aligned} \xi_{\widetilde{l}} &\neq 0 \\ d\pi_{\widetilde{l}}(V_{i,\varepsilon})\xi_{\widetilde{l}} &= 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, d\}, \end{aligned}$$

pour tout $\widetilde{l} \in \widetilde{\mathcal{A}}_\varepsilon$.

Si on définit alors $\xi_l = \xi_{\widetilde{l}}$ avec $\widetilde{l} = p(l)$ pour chaque $l \in \mathcal{A}_\varepsilon$, on obtient une application $\mathcal{C}^\infty$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\varepsilon &\to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \\ l &\mapsto \xi_l \end{aligned}$$

telle que

$$\begin{aligned} \xi_l &\neq 0 \\ d\pi_l(V_i)\xi_l &= 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, d\}, \end{aligned}$$

pour tout $l \in \mathcal{A}_\varepsilon$.

L'assertion (v) du théorème 4.1 est donc prouvée.

La condition de compatibilité

$$\xi_{\mathrm{Ad}^*(u)(l)}(g) = \xi_l(g \cdot u), \quad \forall u, g \in G$$

et le fait que l'application $l \mapsto \xi_l$ est $\mathcal{C}^\infty$ sont bien sûr satisfaits.

On a les mêmes résultats pour les fonctions ζ du théorème 4.1.

Ce qui termine la preuve du théorème 4.1.

Rappelons le théorème d'inversion de Fourier du chapitre précédent.

Théorème 4.2. *Soit $G = \exp(\mathfrak{g})$ un groupe de Lie nilpotent connexe, simplement connexe. Soient*

$$\{0\} = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$$

une suite de Jordan-Hölder fixée et $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ une base de Malcev forte associée. Soit V_T défini précédemment.

Alors il existe un ouvert dense de Zariski G-invariant $\Omega \subset \mathfrak{g}^*_{Puk}$ de $\mathfrak{g}^*$ vérifiant :

Si $\mathfrak{p}(l)$ désigne le polarisation de Vergne en l et si $\mathfrak{H}^\infty_{\pi_l} \equiv \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ pour tout $l \in \mathcal{O}$, alors, étant donné $F \in \mathcal{C}^\infty_c(V_T \cap \mathcal{O}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d))$, il existe $f \in \mathcal{S}(G)$ tel que l'opérateur $\pi_l(f)$ admette comme noyau la fonction $F(l, \cdot, \cdot)$ pour chaque $l \in V_T \cap \mathcal{O}$.

4.10 Les résultats principaux

Commencons tout d'abord par la définition suivante :

Définition 4.2. Soit $G = \exp(\mathfrak{g})$ un groupe de Lie nilpotent connexe, simplement connexe. Soient $U_1, U_2, \dots U_r \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. On dit que les vecteurs U_i sont **Schwartz indépendants** si, pour chaque $k \in \{1, \dots, r\}$, il existe $\varphi_k \in \mathcal{S}(G)$ telle que

$$\begin{aligned}
&\varphi_k * U_k \neq 0 \\
&\varphi_k * U_j = 0 \quad \text{si } j \neq k.
\end{aligned}$$

Rappelons la situation du théorème 4.1.

Soit $G = \exp(\mathfrak{g})$ un groupe de Lie nilpotent connexe, simplement connexe.

Nous allons utiliser les notations et les choix des sections précédentes.

Soit

$$d = \max\{\ \dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{b}) \mid \exists l \in \mathfrak{g}^* \text{ tel que } \mathfrak{b} = \mathfrak{b}(l) \text{ est une polarisation en } l \text{ dans } \mathfrak{g}\ \}.$$

Il est possible de construire des ouverts $\mathcal{A}_\varepsilon$ de $\mathfrak{g}^*$ pour chaque $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d) \in \{-1, 1\}^d$ de la manière suivante :

Il existe des polynômes réels non nuls, G-invariants, $R_1, \dots, R_d$, il existe un ouvert dense de Zariski G-invariant dans $\mathfrak{g}^*$

$$\mathcal{W} = \{l \in \mathcal{V} \mid R_j(l) \neq 0, 1 \leq j \leq d\}$$

Cet espace $\mathcal{W}$ peut être décomposé en une réunion disjointe

$$\mathcal{W} = \dot{\bigcup_{\varepsilon \in \{-1,1\}^d}} \mathcal{A}_\varepsilon$$

où les $\mathcal{A}_\varepsilon$ sont des ensembles ouverts G-invariants donnés par

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \{\ l \in \mathcal{W} \mid \varepsilon_j R_j(l) > 0, 1 \leq j \leq d\ \}.$$

On obtient alors le théorème important suivant :

Théorème 4.3. *Soit* $\varepsilon \in \{-1,1\}^d$ *fixé tel que* $\mathcal{A}_\varepsilon \neq \emptyset$, *alors*
il existe $U_1 = U_{\varepsilon,1}, \ldots, U_d = U_{\varepsilon,d} \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$
et étant donné $l \in \mathcal{A}_\varepsilon$, *il existe* $0 \neq \xi_l \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \equiv \mathfrak{H}^\infty_{\pi_l}$ *vérifiant les propriétés suivantes :*
(i) $U_1, \ldots, U_d$ *sont Schwartz indépendants.*
(ii) Pour chaque $l_0 \in \mathcal{A}_\varepsilon$, *il existe* $0 \neq \varphi \in \mathcal{S}(G)$ *tel que* $\pi_{l_0}(\varphi) \neq 0$ *et* $\varphi * U_k = 0$ *pour tout* $k \in \{1, \ldots, d\}$.
(iii) Si $0 \neq \varphi \in \mathcal{S}(G)$ *est une solution de* $\varphi * U_k = 0$, $1 \leq k \leq d$, *alors* $\pi_l(\varphi) = 0$ *si* $l \in \mathcal{W} \setminus \mathcal{A}_\varepsilon$ *et* $\mathfrak{Im}\pi_l(\varphi^*) \subset \mathbb{C}\xi_l$ *si* $l \in \mathcal{A}_\varepsilon$.
Dans ce cas, il existe $\eta_l \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *tel que*

$$\pi_l(\varphi^*) = P_{\xi_l,\eta_l}$$

où P_{ξ_l,η_l} *est un opérateur de rang un défini par*

$$P_{\xi_l,\eta_l}(\xi) = <\xi, \eta_l> \xi_l, \quad \forall \xi \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

(iv) L'ensemble $\{U_1, \ldots, U_d\}$ *est maximal parmi tous les ensembles* $\{V_1, \ldots, V_r\}$ *d'éléments de* $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ *qui sont Schwartz indépendants et qui vérifient*

$$\forall l \in \mathcal{A}_\varepsilon, \exists\ 0 \neq \varphi \in \mathcal{S}(G) \text{ tel que } \pi_l(\varphi) \neq 0 \text{ et } \varphi * V_j = 0 \text{ pour } 1 \leq j \leq r.$$

Démonstration. Soit $V_1 = V_{1,\varepsilon}, \ldots, V_d = V_{d,\varepsilon}$ défini comme dans le théorème 4.1 et prenons $U_k = V_k^*$ pour tout $k \in \{1, \ldots, d\}$.
(ii) Pour $l_0 \in \mathcal{A}_\varepsilon$ donné, soit

$$\begin{array}{rcl} \gamma : (V_T \cap \mathcal{A}_\varepsilon \cap \mathcal{O}) \times \mathbb{R}^d & \rightarrow & \mathbb{C} \\ (l; s_1, \ldots, s_d) & \mapsto & \gamma(l; s_1, \ldots, s_d) = \gamma_l(s_1, \ldots, s_d) \end{array}$$

avec $0 \neq \gamma \in \mathcal{C}_c^\infty(V_T \cap \mathcal{A}_\varepsilon \cap \mathcal{O}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$ tel que $\gamma_{\widetilde{l_0}} \neq 0$, où $\{\widetilde{l_0}\} = \mathcal{O}_{l_0} \cap V_T$, $\mathcal{O}_{l_0}$ étant l' orbite de l_0.
Cela signifie qu'on suppose qu'il existe un compact K de V_T tel que $K \subset (\mathcal{A}_\varepsilon \cap \mathcal{O}) \cap V_T$, supp$\gamma \subset K \times \mathbb{R}^d$. Par hypothèse, $\gamma_l \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ pour $l \in V_T$ fixée et l'application $l \mapsto \gamma_l$ est $\mathcal{C}^\infty$ dans le sens de la définition 4.1.

Considérons $F(l,\cdot,\cdot) = F_l = \xi_l \otimes \overline{\gamma}_l$ pour $l \in V_T \cap \mathcal{A}_\varepsilon \cap \mathcal{O}$ et $F(l,\cdot,\cdot) = 0$ pour $l \in V_T \setminus (V_T \cap \mathcal{A}_\varepsilon \cap \mathcal{O})$.

Donc $F \in \mathcal{C}_c^\infty(V_T \cap \mathcal{O}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d))$ et il existe, par le théorème 4.2, $\varphi \in \mathcal{S}(G)$ tel que $\pi_l(\varphi^*)$ admette $F(l,\cdot,\cdot)$ comme noyau.

Par construction, $\pi_l(\varphi^*) = P_{\xi_l,\gamma_l}$ si $l \in V_T \cap \mathcal{A}_\varepsilon \cap \mathcal{O}$ et $\pi_l(\varphi^*) = \pi_l(\varphi) = 0$ si $l \in V_T \cap \mathcal{O} \setminus (V_T \cap \mathcal{A}_\varepsilon \cap \mathcal{O})$.

En particulier, comme $\gamma_{\widetilde{l_0}} \neq 0$, $\pi_{\widetilde{l_0}}(\varphi) \neq 0$ et $\pi_{l_0}(\varphi) \neq 0$ car $\pi_{\widetilde{l_0}}$ et π_{l_0} sont unitairement équivalentes.

De plus

$$\pi_l(\varphi * U_j)^* = d\pi_l(U_j^*)\pi_l(\varphi^*) = d\pi_l(V_j)\pi_l(\varphi^*) = 0, \quad \forall l \in V_T \cap \mathcal{O}.$$

En effet, si $l \in V_T \cap \mathcal{O} \setminus (V_T \cap \mathcal{A}_\varepsilon \cap \mathcal{O})$, ceci est vrai car $\pi_l(\varphi^*) = 0$.

Si $l \in V_T \cap \mathcal{A}_\varepsilon \cap \mathcal{O}$,

$$\pi_l(\varphi * U_j)^* = d\pi_l(U_j^*)\pi_l(\varphi^*) = d\pi_l(V_j)P_{\xi_l,\gamma_l} = \Big(d\pi_l(V_j)\xi_l\Big) < \cdot, \gamma_l >= 0,$$

par construction de V_j et ξ_l.

Donc $\varphi * U_j = 0$ pour tout $j \in \{1,\dots,d\}$, comme $V_T \cap \mathcal{O}$ est dense dans V_T et comme chaque orbite dans $\mathfrak{g}^*_{Puk}$ rencontre V_T en un unique point.

(i) On procède de la même manière pour prouver la Schwartz indépendance.

En effet, pour chaque $k \in \{1,\dots,d\}$, remplaçons ξ_l par $\zeta_{k,l}$ dans le théorème 4.1 pour définir le noyau $F_k(l,\cdot,\cdot)$ et la fonction $\varphi_k \in \mathcal{S}(G)$.

Avec les mêmes calculs on obtient, $\pi_l(\varphi_k * U_j) = 0$ pour $l \in V_T \cap \mathcal{O}$ et $\varphi_k * U_j = 0$, si $j \neq k$.

Pour $j = k$, $\gamma_{\widetilde{l_0}} \neq 0$ et $d\pi_{\widetilde{l_0}}(V_k)\zeta_{\widetilde{l_0},k} \neq 0$.

D'où

$$\pi_{\widetilde{l_0}}(\varphi_k * U_k)^* = \Big(d\pi_{\widetilde{l_0}}(V_k)\zeta_{\widetilde{l_0},k}\Big) < \cdot, \gamma_{\widetilde{l_0}} >\neq 0.$$

Donc $\varphi_k * U_k \neq 0$.

(iii) Soit $0 \neq \varphi \in \mathcal{S}(G)$ une solution de $\varphi * U_k = 0$, $1 \leq k \leq d$. Alors

$$d\pi_l(U_j^*)\pi_l(\varphi^*) = d\pi_l(V_j)\pi_l(\varphi^*) = 0, \quad 1 \leq j \leq d,$$

pour chaque $l \in \mathfrak{g}^*$ et

$$\begin{aligned}\mathfrak{Im}\pi_l(\varphi^*) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) &= \{0\} \quad \text{si } l \in \mathcal{W} \setminus \mathcal{A}_\varepsilon \\ \mathfrak{Im}\pi_l(\varphi^*) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) &\subset \bigcap_{j=1}^{d} \mathrm{Ker} d\pi_l(V_j) = \mathbb{C}\xi_l \quad \text{si } l \in \mathcal{A}_\varepsilon\end{aligned}$$

d'après le théorème 4.1.

Supposons que $\mathfrak{Im}\pi_l(\varphi^*) = \mathbb{C}\xi_l$.

Pour chaque $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, il existe $C(l,\psi) \in \mathbb{C}$ tel que

$$\pi_l(\varphi^*)\psi = C(l,\psi)\xi_l.$$

L'application

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \equiv \mathfrak{H}_{\pi_l}^{\infty} & \to & \mathbb{C} \\ \psi & \mapsto & C(l,\psi)\end{array}$$

est linéaire et, pour $l \in \mathcal{A}_\varepsilon$ fixée,

$$|C(l,\psi)| = \frac{\|\pi_l(\varphi^*)\psi\|_2}{\|\xi_l\|_2} \leq \left(\frac{\|\pi_l(\varphi^*)\|_{op}}{\|\xi_l\|_2}\right)\|\psi\|_2.$$

Ceci prouve que l'application linéaire $\psi \mapsto C(l,\psi)$ peut être étendue en une application linéaire bornée de $L^2(\mathbb{R}^d)$ sur $\mathbb{C}$ et donc qu'il existe $\eta_l \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tel que

$$C(l,\psi) =< \psi, \eta_l > \quad \text{pour chaque } \psi \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

En particulier,

$$\pi_l(\varphi^*)\psi =< \psi, \eta_l > \xi_l = P_{\xi_l,\eta_l}\psi$$

et $\pi_l(\varphi^*) = P_{\xi_l,\eta_l}$.

(iv) Pour prouver la maximalité de $\{U_1, \ldots, U_d\}$, supposons qu'il existe $U \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ tel que pour chaque $l_0 \in \mathcal{A}_\varepsilon$, il existe $\varphi \in \mathcal{S}(G)$ vérifiant $\pi_{l_0}(\varphi) \neq 0$ et

$$\begin{aligned}\varphi * U_1 &= 0 \\ &\vdots \\ \varphi * U_d &= 0\end{aligned}$$

$$\varphi * U \;=\; 0.$$

Ainsi $\pi_{l_0}(\varphi^*) = P_{\xi_{l_0},\eta_{l_0}}$ avec $\eta_{l_0} \neq 0$, d'après les arguments précédents. Mais alors

$$0 = \pi_{l_0}(\varphi * U)^* = d\pi_{l_0}(U^*)P_{\xi_{l_o},\eta_{l_0}} =< \cdot, \eta_{l_0} > d\pi_{l_0}(U^*)\xi_{l_0}.$$

Comme $\eta_{l_0} \neq 0$, $d\pi_{l_0}(U^*)\xi_{l_0} = 0$.

Tout ceci peut être fait pour $l_0 \in \mathcal{A}_\varepsilon$, i.e., $d\pi_{l_0}(U^*)\xi_{l_0} = 0$ pour chaque $l_0 \in \mathcal{A}_\varepsilon$.

On doit montrer à présent que dans ce cas $U_1, \ldots, U_d, U$ ne peuvent être Schwartz indépendants.

En effet, soit $0 \neq \zeta \in \mathcal{S}(G)$ tel que $\zeta * U_k = 0$, pour $k = 1, \ldots, d$.

Donc $\pi_l(\zeta) = 0$ si $l \in \mathcal{W} \setminus \mathcal{A}_\varepsilon$ et $\pi_l(\zeta^*) = P_{\xi_l,\eta_l}$ pour $\eta_l \in L^2(\mathbb{R}^d)$ si $l \in \mathcal{A}_\varepsilon$.

Finalement, si $l \in \mathcal{A}_\varepsilon$,

$$\big(\pi_l(\zeta * U)\big)^* = d\pi_l(U^*)P_{\xi_l,\eta_l} =< \cdot, \eta_l > d\pi_l(U^*)\xi_l = 0.$$

Ceci implique que $\pi_l(\zeta * U) = 0$ pour toute $l \in \mathcal{W}$ et $\zeta * U = 0$. Ainsi $U_1, \ldots, U_d, U$ ne peuvent être Schwartz indépendants.

Donc $\{U_1, \ldots, U_d\}$ est maximal avec les propriétés requises. □

4.11 Solutions faibles

Tout d'abord, posons la définition suivante :

Définition 4.3. Pour chaque $l \in \mathcal{A}_\varepsilon$ fixé et chaque $V_1, \ldots, V_d \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, on dit que $\eta \in L^2(\mathbb{R}^d)$ **est une solution faible de**

$$d\pi_l(V_j)\xi = 0, \quad j \in \{1, \ldots, d\}$$

si

$$< \eta, d\pi_l(V_j^*)\varphi >= 0, \quad \forall j \in \{1, \ldots, d\}, \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Les solutions faibles du système d'équations du théorème 4.1 sont caractérisées par le théorème suivant :

Théorème 4.4. *Soit* $G = \exp(\mathfrak{g})$ *un groupe de Lie nilpotent connexe, simplement connexe. On utilise les notations* d, $\mathcal{W}$, $\mathcal{A}_\varepsilon$ *du théorème 4.1. Pour* ε *fixé, posons* $V_1, \dots, V_d \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ *et* ξ_l *comme dans le théorème 4.1. Alors les solutions faibles du système*

$$\begin{cases} d\pi_l(V_1)\xi = 0 \\ \quad\vdots \\ d\pi_l(V_d)\xi = 0 \end{cases}$$

coincident avec les fonctions sur $\mathbb{R}^d$ *données par*

$$\eta_l = C(l)\xi_l \quad \text{presque partout si } l \in \mathcal{A}_\varepsilon,$$

où $C(l)$ *est une constante dépendant de* l *et*

$$\eta_l = 0 \quad \text{presque partout si } l \in \mathcal{W} \setminus \mathcal{A}_\varepsilon,$$

i.e., les solutions faibles coincident avec les solutions fortes presque partout.

Démonstration. Les fonctions ξ_l sont bien sûr des solutions faibles. La réciproque se prouve par récurrence. Pour le groupe de Heisenberg $G = H_1$, voir [L-M].

Si $n = j_d$ est un indice de saut, alors $V_d = X_{j_d} - i\varepsilon_d Y_{j_d}$.

Pour chaque $l \in \mathcal{W}$, prenons $l_1 \in \mathcal{O}_l$ comme dans la preuve du théorème 4.1.

On doit tout d'abord faire la preuve pour ce l_1 particulier. Soient η une solution faible et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d-1})$ arbitraires. Par hypothèse et comme Y_{j_d} est anti-hermitien,

$$< \eta, d\pi_{l_1}(X_{j_d} - i\varepsilon_d Y_{j_d})^* \varphi \otimes \psi > = < \eta, d\pi_{l_1}(-X_{j_d} - i\varepsilon_d Y_{j_d})\varphi \otimes \psi > = 0,$$

i.e.,

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \eta(s_1, \dots, s_d) \overline{\left[\frac{\partial}{\partial s_d}\varphi(s_d) - \varepsilon_d R_d(l_1) s_d \varphi(s_d)\right]}\, \overline{\psi(s_1, \dots, s_{d-1})} ds_1 \dots ds_{d-1} ds_d = 0,$$

d'après la section 4.8.4. Comme $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d-1})$ est arbitraire,

$$\int_{\mathbb{R}} \eta(s_1, \dots, s_{d-1}, s_d) \overline{\left[\frac{\partial}{\partial s_d}\varphi(s_d) - \varepsilon_d R_d(l_1) s_d \varphi(s_d)\right]} ds_d = 0$$

pour presque tout $s_1, \ldots, s_{d-1}$.

Donc, par le résultat obtenu pour le groupe de Heisenberg [L-M],

$$\eta(s_1, \ldots, s_{d-1}, s_d) = C(l_1, s_1, \ldots, s_{d-1}) e^{-\frac{1}{2}\varepsilon_d R_d(l_1) s_d^2}$$

presque partout si $\varepsilon_d R_d(l_1) > 0$. Ici $C_{l_1}(s_1, \ldots, s_{d-1}) = C(l_1, s_1, \ldots, s_{d-1}) \in L^2(\mathbb{R}^{d-1})$. D'où, pour chaque $j \in \{1, \ldots, d\}$ et chaque $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d-1})$et pour U_j, C_j comme dans la preuve du théorème 4.1,

$$\begin{aligned}
&< \eta, d\pi_{l_1}(V_j^*)\varphi \otimes \psi >= 0 \\
&< C_{l_1}(s_1, \ldots, s_{d-1}) e^{-\frac{1}{2}\varepsilon_d R_d(l_1) s_d^2}, d\pi_{l_1}(V_j^*)[\varphi(s_d)\psi(s_1, \ldots, s_{d-1})] >= 0 \\
&\overline{C}_j < e^{-\frac{1}{2}\varepsilon_d R_d(l_1) s_d^2}, \varphi(s_d) >_{\mathbb{R}} < C_{l_1}(s_1, \ldots, s_{d-1}), d\pi_{\widetilde{l}_1}(U_j^*)\psi(s_1, \ldots, s_{d-1}) >_{\mathbb{R}^{d-1}} = 0 \\
&< C_{l_1}(s_1, \ldots, s_{d-1}), d\pi_{\widetilde{l}_1}(U_j^*)\psi(s_1, \ldots, s_{d-1}) >_{\mathbb{R}^{d-1}} = 0
\end{aligned}$$

comme φ est arbitraire. Ainsi $C_{l_1}(s_1, \ldots, s_{d-1})$ est une solution faible dans $L^2(\mathbb{R}^{d-1})$ de

$$d\pi_{\widetilde{l}_1}(U_j)\xi = 0, \quad j = 1, \ldots, d-1.$$

Par récurrence, $C_{l_1}(s_1, \ldots, s_{d-1}) = C(l_1)\xi_{\widetilde{l}_1}(s_1, \ldots, s_{d-1})$ presque partout

et $\eta = C(l_1)\eta_{l_1} \otimes \xi_{\widetilde{l}_1} = C(l_1)\widetilde{\xi}_{l_1} \equiv C(l_1)\xi_{l_1}$ presque partout.

Alors le raisonnement précédent est justifié par ce qui suit : comme $X \in \mathfrak{g}$, $X^* = -X$, $(\mathrm{ad}(X)V)^* = \mathrm{ad}(X)(V^*)$ et $[\mathrm{Ad}(\exp(-tX))V]^* = \mathrm{Ad}(\exp(-tX))(V^*)$.

Donc

$$\begin{aligned}
d\pi_{l_1}(V_j^*)\widetilde{\xi}(t, \widetilde{g}) &= d\pi_{\widetilde{l}_1}\Big(\mathrm{Ad}(\exp(-tX))V_j^*\Big)\widetilde{\xi}(t, \cdot)(\widetilde{g}) \\
&= \Big[d\pi_{\widetilde{l}_1}\Big(\mathrm{Ad}(\exp(-tX))V_j\Big)\Big]^*\widetilde{\xi}(t, \cdot)(\widetilde{g}) \\
&= \Big[C_j d\pi_{\widetilde{l}_1}(U_j)\Big]^*\widetilde{\xi}(t, \cdot)(\widetilde{g}) \\
&= \overline{C}_j d\pi_{\widetilde{l}_1}(U_j^*)\widetilde{\xi}(t, \cdot)(\widetilde{g})
\end{aligned}$$

Si $l \in \mathcal{W} \setminus \mathcal{A}_\varepsilon$, $l_1 \in \mathcal{W} \setminus \mathcal{A}_\varepsilon$, ou bien $\varepsilon_d R_d(l_1) < 0$ et $\eta(s_1, \ldots, s_{d-1}, s_d) = 0$, ou $\varepsilon_d R_d(l_1) > 0$ et $p(l_1) = \widetilde{l}_1 \notin \widetilde{\mathcal{A}}_\varepsilon$. Par récurrence ceci implique que $C_{l_1}(s_1, \ldots, s_{d-1}) = 0$.

Dans tous les cas, $\eta = 0$.

Pour prouver le résultat pour la forme linéaire l de départ, rappelons que $l_1 \in \mathcal{O}_l$, que

π_{l_1} et π_l sont unitairement équivalentes et que si ξ_{l_1} et ξ_l sont les solutions respectives données par le théorème 4.1, alors on peut transformer une de ces solutions en l'autre par cette équivalence unitaire. Comme de plus cette équivalence unitaire respecte le produit scalaire, le résultat sur les solutions faibles reste correct pour la forme linéaire de départ l.

Dans le cas II, les espaces de représentation et les représentations ne changent pas lors du passage de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ à $\mathfrak{g}$. Et ainsi, le résultat est automatiquement prouvé par récurrence. $\square$

On doit à présent étudier les solutions faibles du système d'équations différentielles qui nous intéressent. Considérons la définition suivante :

Définition 4.4. Pour chaque $l \in \mathcal{A}_\varepsilon$ fixée et chaque $U_1, \ldots, U_d \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, on dit que $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ **est une solution faible du système** $f * U_j = 0$**,** $j = 1, \ldots, d$, si, pour chaque $\varphi \in \mathcal{S}(G)$,

$$< f, \varphi * U_j^* >= 0, \quad j = 1, \ldots, d.$$

Maintenant posons $V_1, \ldots, V_d$ comme dans le théorème 4.1 et $U_k = V_k^*$ $(k = 1, \ldots, d)$. D'après le théorème de Plancherel, on a pour chaque solution faible f de $f * U_k = 0$ $(k \in \{1, \ldots, d\})$ et chaque $\varphi \in \mathcal{S}(G)$, pour tout $k \in \{1, \ldots, d\}$,

$$\begin{aligned} 0 &= < f, \varphi * U_k^* > \\ &= \int_{V_T \cap \mathfrak{g}^*_{Puk}} \operatorname{tr}\Big(\pi_l(f) d\pi_l(U_k) \pi_l(\varphi^*)\Big) |Pf(l)| dl. \end{aligned}$$

Choisissons une suite de fonctions $f_n \in \mathcal{S}(G)$ qui converge vers f dans $L^2(G)$ et, pour $k \in \{1, \ldots, d\}$ fixé mais arbitraire, on remplace φ par $f_n * U_k * \varphi * \varphi^*$.

Ainsi

$$\int_{V_T \cap \mathfrak{g}^*_{Puk}} \operatorname{tr}\Big(\pi_l(f) d\pi_l(U_k) \pi_l(\varphi) \Big[\pi_l(f_n) d\pi_l(U_k) \pi_l(\varphi)\Big]^*\Big) |Pf(l)| dl = 0.$$

Mais $(f_n)_n$ converge vers f dans $L^2(G)$.

D'où

$$\int_{V_T \cap \mathfrak{g}^*_{Puk}} \operatorname{tr}\Big(\pi_l(f) d\pi_l(U_k) \pi_l(\varphi) \Big[\pi_l(f) d\pi_l(U_k) \pi_l(\varphi)\Big]^*\Big) |Pf(l)| dl = 0$$

et

$$\pi_l(f)d\pi_l(U_k)\pi_l(\varphi) = 0, \quad \text{pour presque toute } l \in V_T \cap \mathfrak{g}^*_{Puk}.$$

Ceci peut être fait pour chaque $k \in \{1, \ldots, d\}$. Choisissons les fonctions φ dans un ensemble dénombrable dense $\mathcal{C}$ de $\mathcal{S}(G)$. Pour chaque $\varphi \in \mathcal{C}$, il existe un ensemble de mesure nulle $N_\varphi \subset V_T \cap \mathfrak{g}^*_{Puk}$ tel que

$$\pi_l(f)d\pi_l(U_k)\pi_l(\varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}, \forall l \in (V_T \cap \mathfrak{g}^*_{Puk}) \setminus N_\varphi, \forall k \in \{1, \ldots, d\}.$$

L'ensemble $N = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{C}} N_\varphi$ est encore de mesure nulle et

$$\pi_l(f)d\pi_l(U_k)\pi_l(\varphi)\eta = 0, \quad \forall l \in (V_T \cap \mathfrak{g}^*_{Puk}) \setminus N, \forall \varphi \in \mathcal{C}, \forall \eta \in \mathcal{S}(G) \equiv \mathfrak{H}^\infty_{\pi_l}, \forall k \in \{1, \ldots, d\}.$$

Comme $\pi_l(\mathcal{C})\mathfrak{H}^\infty_{\pi_l}$ est dense dans $\mathfrak{H}^\infty_{\pi_l}$, $\pi_l(f) = 0$ sur $\mathfrak{Im}(d\pi_l(U_k))$ pour tout $k \in \{1, \ldots, d\}$ et, pour tout $\varphi, \psi \in \mathfrak{H}^\infty_{\pi_l}$,

$$< d\pi_l(U_k)\varphi, \pi_l(f^*)\psi >=< \pi_l(f)d\pi_l(U_k)\varphi, \psi >= 0, \quad \forall k \in \{1, \ldots, d\},$$

i.e., pour tout $\psi \in \mathfrak{H}^\infty_{\pi_l}$ et pour toute $l \in (V_T \cap \mathfrak{g}^*_{Puk}) \setminus N$, $\pi_l(f^*)\psi$ est une solution faible du système d'équations $d\pi_l(U_k^*)\xi = d\pi_l(V_k)\xi = 0$, $k \in \{1, \ldots, d\}$.

D'après le théorème 4.3 et la densité de $\mathfrak{H}^\infty_{\pi_l}$ dans $\mathfrak{H}_{\pi_l}$, on peut alors conclure que

$$\pi_l(f^*)\mathfrak{H}_{\pi_l} \subset \mathbb{C}\xi_l, \quad \text{pour presque toute } l \in V_T \cap \mathcal{A}_\varepsilon$$

où ξ_l est définie comme dans le théorème 4.1 et

$$\pi_l(f^*)\mathfrak{H}_{\pi_l} = \{0\}, \quad \text{pour presque toute } l \in V_T \setminus (V_T \cap \mathcal{A}_\varepsilon).$$

Supposons que f est une solution faible de $f * U_k = 0$ $(k = 1, \ldots d)$.

Fixons $l \in V_T \cap \mathcal{A}_\varepsilon \setminus (N \cap \mathcal{A}_\varepsilon)$. Par le même raisonnement que dans le théorème 4.3 (iii), il existe $\eta_l \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tel que

$$\pi_l(f^*) = P_{\xi_l, \eta_l} \quad \text{et} \quad \pi_l(f) = P^*_{\xi_l, \eta_l} = P_{\eta_l, \xi_l}.$$

Ainsi $\pi_l(f)$ est un opérateur à noyau dont le noyau est égal à $\eta_l \otimes \overline{\xi_l}$, pour presque toute $l \in V_T \cap \mathcal{A}_\varepsilon$.

Donc
$$\|\pi_l(f)\|_{HS} = \|\eta_l \otimes \overline{\xi}_l\|_2 = \|\eta_l\|_2 \; \|\xi_l\|_2$$
pour presque toute $l \in V_T \cap \mathcal{A}_\varepsilon$ et $\pi_l(f) = 0$ pour presque toute $l \in V_T \setminus (V_T \cap \mathcal{A}_\varepsilon)$.

On peut donc poser $\eta_l \equiv 0$ si $l \notin \mathcal{A}_\varepsilon$ et on a

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \int_{V_T \cap \mathfrak{g}^*_{Puk}} \|\pi_l(f)\|_{HS}^2 |Pf(l)| dl \\ &= \int_{V_T \cap \mathfrak{g}^*_{Puk}} \|\eta_\lambda\|_2^2 \; \|\xi_l\|_2^2 |Pf(l)| dl \\ &< +\infty \end{aligned} \tag{11.5}$$

Pour ε fixé mais arbitraire, posons $U_{k,\varepsilon}$ à la place de U_k.

Pour caractériser les solutions faibles du système $f * U_{\varepsilon,k} = 0$ ($k = 1, \ldots, d$ et ε fixé), introduisons les notations suivantes :

Définition 4.5. Pour chaque $\varepsilon \in \{-1, 1\}^d$ fixé tel que $\mathcal{A}_\varepsilon \neq \emptyset$, **les sous-espaces $\mathcal{S}_\varepsilon(G)$** de $\mathcal{S}(G)$ et $L^2_\varepsilon(G)$ de $L^2(G)$ sont définis par

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\varepsilon(G) &= \{f \in \mathcal{S}(G) \mid f * U_{\varepsilon,k} = 0, \; k = 1, \ldots, d\} \\ L^2_\varepsilon(G) &= \overline{\mathcal{S}_\varepsilon(G)} \end{aligned}$$

Les solutions faibles de notre système d'équations sont alors caractérisées par le théorème suivant :

Théorème 4.5. *Soit $G = \exp(\mathfrak{g})$ un groupe de Lie nilpotent connexe, simplement connexe. Utilisons les notations d, $\mathcal{A}_\varepsilon$ comme dans le théorème 4.1. Pour $\varepsilon \in \{-1, 1\}^d$ fixé, soient $V_{1,\varepsilon}, \ldots, V_{d,\varepsilon} \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ comme dans le théorème 4.1. Soient $U_{k,\varepsilon} = V^*_{k,\varepsilon}$ pour $k = 1, \ldots, d$. Donc l'ensemble des solutions faibles du système d'équations $f * U_k = 0$, $k = 1, \ldots, d$, est égal à $L^2_\varepsilon(G)$, i.e., chaque solution faible est la limite, dans $L^2(G)$, d'une suite de solutions fortes des mêmes équations.*

Démonstration. Soit $f \in L^2(G)$ une solution faible telle que $\pi_l(f) = P_{\eta_l, \xi_l}$ pour presque toute $l \in V_T \cap \mathcal{A}_\varepsilon$ et $\pi_l(f) = 0$ si $l \notin \mathcal{A}_\varepsilon$. Soit $g \in \mathcal{S}(G)$ une solution forte construite comme dans le théorème 9.3 telle que $\pi_l(g) = P_{\gamma_l, \xi_l}$ pour toute $l \in V_T \cap \mathcal{A}_\varepsilon \cap \mathcal{O}$, pour

$\gamma \in \mathcal{C}_c^\infty(V_T \cap \mathcal{A}_\varepsilon \cap \mathcal{O}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$, $\gamma_l(\cdot) = \gamma(l, \cdot)$, avec supp$\gamma \subset K \times \mathbb{R}^d$ où K est un compact dans V_T contenu dans $V_T \cap \mathcal{A}_\varepsilon \cap \mathcal{O}$. La fonction γ et les compacts K seront déterminés plus tard.

Alors

$$\begin{aligned}
\|g-f\|_2^2 &= \int_{V_T \cap \mathfrak{g}^*_{Puk}} \|\pi_l(g) - \pi_l(f)\|_{HS}^2 |Pf(l)| dl \\
&= \int_{V_T \cap \mathfrak{g}^*_{Puk}} \|P_{(\gamma_l - \eta_l), \xi_l}\|_{HS}^2 |Pf(l)| dl \\
&= \int_{V_T \cap \mathfrak{g}^*_{Puk}} \|\gamma_l - \eta_l\|_2^2 \ \|\xi_l\|_2^2 |Pf(l)| dl \\
&= \|\gamma(\cdot,\cdot) - \eta(\cdot,\cdot)\|^2_{L^2((V_T \cap \mathfrak{g}^*_{Puk}) \times \mathbb{R}^d, \|\xi_l\|_2^2 |Pf(l)| dl ds_1 \cdots ds_d)}
\end{aligned}$$

Soit $M \in \mathbb{N}$ arbitraire et déterminons les constantes K et γ telles que $\|g-f\|_2 < \frac{1}{M}$. D'après la formule(11.6) on sait que

$$\int_{V_T \cap \mathfrak{g}^*_{Puk}} \|\eta_l\|_2^2 \ \|\xi_l\|_2^2 |Pf(l)| dl = \|f\|_2^2 < +\infty,$$

i.e., l'application $l \mapsto \|\eta_l\|_2$ appartient à $L^2(V_T \cap \mathfrak{g}^*_{Puk}, \|\xi_l\|_2^2 |Pf(l)| dl)$ et cette application est nulle en dehors de $V_T \cap \mathcal{A}_\varepsilon$.

De plus comme $V_T \cap \mathcal{A}_\varepsilon \cap \mathcal{O}$ est un ouvert dense de $V_T \cap \mathcal{A}_\varepsilon$, il existe un compact K_1 de $V_T \cap \mathcal{A}_\varepsilon \cap \mathcal{O}$ d'intérieur non vide int(K_1) dans V_T tel que

$$\left(\int_{(V_T \cap \mathcal{A}_\varepsilon) \setminus K_1} \|\eta_l\|_2^2 \ \|\xi_l\|_2^2 |Pf(l)| dl \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{M}.$$

Soit maintenant K un compact de V_T d'intérieur int(K) non vide dans V_T tel que

$$\emptyset \neq \mathrm{int}(K_1) \subset K_1 \subset \mathrm{int}(K) \subset K \subset V_T \cap \mathcal{A}_\varepsilon \cap \mathcal{O}.$$

Construisons une fonction $\varphi_K \in \mathcal{C}_c^\infty(V_T \cap \mathfrak{g}^*_{Puk})$ telle que

$$\begin{aligned}
&0 \leq \varphi_K \leq 1 \\
&\varphi_K \equiv 1 \text{ sur } K_1 \\
&\mathrm{supp}\varphi_K \subset K
\end{aligned}$$

et posons

$$\gamma_l(s_1,\ldots,s_d)=\varphi_K(l)\cdot\eta_l(s_1,\ldots,s_d)\in L^2((V_T\cap\mathfrak{g}^*_{Puk})\times\mathbb{R}^d,\|\xi_l\|_2^2\;|Pf(l)|dlds_1\cdots ds_d).$$

Donc

$$\begin{aligned}\|\eta_\cdot(\cdot)-\gamma_\cdot(\cdot)\|^2_{L^2((V_T\cap\mathfrak{g}^*_{Puk})\times\mathbb{R}^d,\|\xi_l\|_2^2|Pf(l)|dlds_1\cdots ds_d)} &= \int_{V_T\cap\mathfrak{g}^*_{Puk}}\|\eta_l(\cdot)\|_2^2\Big(1-\varphi_K(l)\Big)^2\|\xi_l\|_2^2|Pf(l)|dl\\ &\le \int_{(V_T\cap\mathcal{A}_\varepsilon\cap\mathcal{O})\setminus K_1}\|\eta_l(\cdot)\|_2^2\;\|\xi_l\|_2^2|Pf(l)|dl\\ &< \left(\frac{1}{M}\right)^2.\end{aligned}$$

Comme M est assez grand, ceci prouve le théorème. $\square$

4.12 Désintégration de la représentation régulière gauche

Soit $\varepsilon\in\{-1,1\}^d$ tel que $\mathcal{A}_\varepsilon\neq\emptyset$.

Soit ρ la représentation régulière gauche de $L^1(G)$ sur $L^2(G)$ définie par

$$\rho(f)g=f*g,\quad \forall f\in L^1(G),\forall g\in L^2(G).$$

Remarquons que le sous-espace fermé $L^2_\varepsilon(G)$ de $L^2(G)$ est stable pour cette représentation. Soit $\rho_0=\rho|_{L^2_\varepsilon(G)}$ la restriction de ρ à ce sous-espace.

On doit maintenant désintégrer ρ_0 en représentations irréductibles.

Rappelons tout d'abord que pour chaque $g\in L^2_\varepsilon(G)$ et presque toute forme linéaire $l\in\mathcal{A}_\varepsilon$, il existe $\eta_l=\eta_l(g)\in L^2(\mathbb{R}^d)\equiv\mathfrak{H}_{\pi_l}$ tel que $\pi_l(g)=P_{\eta_l,\xi_l}$.

Donc, pour chaque $f\in L^1(G)$,

$$\pi_l(f*g)=\pi_l(f)P_{\eta_l,\xi_l}=P_{\pi_l(f)\eta_l,\xi_l},$$

i.e.,

$$\eta_l(f*g)=\pi_l(f)\eta_l(g).$$

D'autre part, si $g \in L^2_\varepsilon(G)$ et $l \notin \mathcal{A}_\varepsilon$, alors $\pi_l(g) = 0$.

On peut donc prendre $\eta_l \equiv 0$, si $l \notin \mathcal{A}_\varepsilon$.

Maintenant considérons l'espace

$$\mathfrak{H} = \int_{V_T \cap \mathfrak{g}^*_{Puk}} n_l \mathfrak{H}_{\pi_l} \|\xi_l\|_2^2 \; |Pf(l)| dl$$

avec $n_l = 0$ si $l \in V_T \setminus (V_T \cap \mathcal{A}_\varepsilon)$ et $n_l = 1$ pour presque toute $l \in V_T \cap \mathcal{A}_\varepsilon$ et définissons la représentation Π de $L^1(G)$ sur $\mathfrak{H}$ par

$$(\Pi(f)\zeta)_l = \pi_l(f)\zeta_l, \quad \forall f \in L^1(G), \forall \zeta = (\zeta_l)_l \in \mathfrak{H}.$$

Alors les représentations $(L^2_\varepsilon(G), \rho_0)$ et $(\mathfrak{H}, \Pi)$ sont équivalentes.

En effet, définissons

$$U : L^2_\varepsilon(G) \to \mathfrak{H}$$

par

$$(Ug)_l = \eta_l(g), \quad \text{pour presque toute } l \in V_T.$$

D'après le théorème de Plancherel 1.2, U est une isométrie de $L^2_\varepsilon(G)$ sur $\mathfrak{H}$, car

$$\|Ug\|_2^2 = \int_{V_T \cap \mathcal{A}_\varepsilon} \|\eta_l(g)\|_2^2 \; \|\xi_l\|_2^2 \; |Pf(l)| dl = \|g\|_2^2.$$

Comme cette application est aussi linéaire, par construction, elle est injective. Elle est surjective, car chaque fonction $\gamma \in \mathcal{C}_c^\infty(V_T, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$ telle que $\mathrm{supp}\gamma(l,s) \subset K \times \mathbb{R}^d$, où K est un compact de $V_T \cap \mathcal{A}_\varepsilon \cap \mathcal{O}$, est dans l'image de $L^2_\varepsilon(G)$ par U et ces fonctions sont denses dans $\mathfrak{H}$.

L'application U entrelace les représentations ρ_0 et Π, car, pour chaque $g \in L^2_\varepsilon(G)$ et presque toute $l \in V_T$,

$$\begin{aligned}
\Big[(U \circ \rho_0(f))g\Big]_l &= \Big[U(\rho_0(f)g)\Big]_l \\
&= \eta_l\Big(\rho_0(f)g\Big) \\
&= \eta_l(f * g) \\
&= \pi_l(f)\eta_l(g)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \pi_l(f)\Big(Ug\Big)_l \\ &= \Big[\Pi(f)(Ug)\Big]_l. \end{aligned}$$

Donc ρ_0 est unitairement équivalente à

$$\Pi = \int_{V_T \cap \mathfrak{g}^*_{Puk}} n_l \pi_l \|\xi_l\|_2^2 \; |Pf(l)| dl$$

avec $n_l = 0$ si $l \notin \mathcal{A}_\varepsilon$ et $n_l = 1$ pour presque toute $l \in V_T \cap \mathcal{A}_\varepsilon$,

et on obtient une désintégration de $\rho_0 = \rho|_{L^2_\varepsilon(G)}$ en représentations irréductibles π_l avec multiplicités 1 pour presque toute $l \in V_T \cap \mathcal{A}_\varepsilon$, et 0 si $l \notin \mathcal{A}_\varepsilon$.

4.13 Décomposition de l'espace $L^2(G)$

Pour chaque $\varepsilon \in \{-1,1\}^d$, on a défini un ouvert $\mathcal{A}_\varepsilon$ de $\mathfrak{g}^*$ tel que $\mathcal{W} = \bigsqcup_{\varepsilon \in \{-1,1\}^d} \mathcal{A}_\varepsilon$ est un ouvert dense de $\mathfrak{g}^*$.

Pour chaque ε tel que $\mathcal{A}_\varepsilon \neq \emptyset$, on a construit un ensemble d'éléments $U_{1,\varepsilon}, \ldots, U_{d,\varepsilon}$ de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ et défini $\mathcal{S}_\varepsilon(G)$ et $L^2_\varepsilon(G)$ par

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\varepsilon(G) &= \{ f \in \mathcal{S}(G) \mid f * U_{k,\varepsilon} = 0,\; k = 1, \ldots, d \} \\ L^2_\varepsilon(G) &= \overline{\mathcal{S}_\varepsilon(G)} \end{aligned}$$

où $L^2_\varepsilon(G)$ coïncide aussi avec l'ensemble des solutions faibles du système d'équations

$$f * U_{k,\varepsilon} = 0,\; k = 1, \ldots, d.$$

Rappelons aussi que G agit sur $\mathfrak{g}$ par Ad et que cette action peut être étendue à tout $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Si $u \in G$ et $V \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, notons V^u cette action de u sur V.

Définissons alors les sous-espaces suivants :

Définition 4.6. Pour $u \in G$, on définit

$$\mathcal{S}_{u,\varepsilon}(G) = \{\varphi \in \mathcal{S}(G) \mid \varphi * U^u_{j,\varepsilon} = 0,\ j = 1, \ldots, d\}$$

et

$$L^2_{u,\varepsilon}(G) = \overline{\mathcal{S}_{u,\varepsilon}(G)}.$$

Pour $u = e$, l'élément neutre du groupe G, on écrira $\mathcal{S}_\varepsilon(G)$ et $L^2_\varepsilon(G)$ à la place de $\mathcal{S}_{e,\varepsilon}(G)$ et $L^2_{e,\varepsilon}(G)$.

Comme $\psi * U_{j,\varepsilon} = 0$ si et seulement si $\psi^u * U^u_{j,\varepsilon} = 0$, on a

$$\mathcal{S}_{u,\varepsilon}(G) = \Big(\mathcal{S}_\varepsilon(G)\Big)^u \text{ et } L^2_{u,\varepsilon}(G) = \Big(L^2_\varepsilon(G)\Big)^u.$$

Soit à présent $\psi \in L^2_{u,\varepsilon}(G)$, i.e., $\varphi = \psi^{u^{-1}} \in L^2_\varepsilon(G)$.

Comme $\pi_l(\varphi^u) = \pi_l(u)\pi_l(\varphi)\pi_l(u^{-1})$, $\pi_l(\varphi) = 0$ pour toute $l \notin \mathcal{A}_\varepsilon$ implique que $\pi_l(\psi) = 0$ pour toute $l \notin \mathcal{A}_\varepsilon$.

De même, $\pi_l(\varphi) = P_{\eta_l,\xi_l}$ pour presque toute $l \in \mathcal{A}_\varepsilon$ implique que $\pi_l(\psi) = P_{\pi_l(u)\eta_l,\pi_l(u)\xi_l}$ pour presque toute $l \in \mathcal{A}_\varepsilon$, i.e., $\pi_l(\psi)$ est aussi un opérateur de rang un dans ce cas.

On a les relations d'orthogonalité suivantes :

Proposition 4.1. *Soient $u, u' \in G$ et $\varepsilon, \varepsilon' \in \{-1, 1\}^d$ tels que $\mathcal{A}_\varepsilon \neq \emptyset$, $\mathcal{A}_{\varepsilon'} \neq \emptyset$ et $\varepsilon \neq \varepsilon'$.*

Alors les sous-espaces $L^2_{u,\varepsilon}(G)$ et $L^2_{u',\varepsilon'}(G)$ sont orthogonaux.

Démonstration. Le fait que $\varphi \in L^2_{u,\varepsilon}(G)$ implique que $\pi_l(\varphi) = 0$ pour toute $l \notin \mathcal{A}_\varepsilon$ et $\psi \in L^2_{u',\varepsilon'}(G)$ implique que $\pi_l(\psi) = 0$ pour toute $l \notin \mathcal{A}_{\varepsilon'}$.

Comme $\mathcal{A}_\varepsilon \cap \mathcal{A}_{\varepsilon'} = \emptyset$ si $\varepsilon \neq \varepsilon'$, le théorème de Plancherel nous donne le résultat. □

Remarque. Pour le même ε, les espaces $L^2_{u,\varepsilon}(G)$ et $L^2_{u',\varepsilon}(G)$ ne sont pas nécessairement orthogonaux, probablement leur intersection n'est même pas triviale.

Si u et u' diffèrent d'un élément central, les espaces $L^2_{u,\varepsilon}(G)$ et $L^2_{u',\varepsilon}(G)$ coïncident.

Pour prouver que ces sous-espaces engendrent tout $L^2(G)$, on a besoin d'un résultat de "type Wiener".

On utilisera la définition suivante :

Définition 4.7. Soit G un groupe localement compact, à base dénombrable, de type I, unimodulaire.

Soit $\mathcal{V} \subset L^2(G)$ un sous-ensemble fermé de $L^2(G)$. Soit $\{\xi_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ un sous-ensemble dénombrable dense de $\mathcal{V}$.

On appelle **support de** $\mathcal{V}$ et on note $\mathrm{Supp}\mathcal{V}$ l'ensemble

$$\mathrm{Supp}\mathcal{V} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \{ \pi \in \widehat{G} \mid \pi(\xi_i) \neq 0 \},$$

à un ensemble de mesure nulle près.

Ici $\pi(\xi_i)$ représente l'opérateur, au sens L^2, donné par le théorème de Plancherel. L'ensemble $\mathrm{Supp}\mathcal{V}$, défini à un ensemble de mesure nulle près, est mesurable et est indépendant du sous-ensemble dénombrable dense $\{ \xi_i \mid i \in \mathbb{N} \}$.

On a alors le résultat suivant de " type Wiener " :

Théorème 4.6. *Soit G un groupe localement compact, à base dénombrable, de type I, unimodulaire. Soit $\mathcal{V} \subset L^2(G)$ un sous-espace fermé qui est invariant à droite et à gauche par les éléments de G.*

Si $\mathrm{Supp}\mathcal{V} = \widehat{G}$ *(à un ensemble de mesure près), alors $\mathcal{V} = L^2(G)$.*

Démonstration. C'est une conséquence d'un résultat plus général de Sutherland, consulter [Su1]. □

Corollaire 4.1. *Soit G un groupe localement compact, à base dénombrable, de type I, unimodulaire qui est invariant par translation à droite et à gauche par les éléments de G. Supposons qu'il existe un ensemble de mesure nulle N dans $\widehat{G}$ tel que pour toute représentation $\pi \in \widehat{G} \setminus N$, il existe $\xi \in \mathcal{V}$ tel que $\pi(\xi) \neq 0$.*

Alors $\mathcal{V} = L^2(G)$.

On obtient la décomposition de $L^2(G)$ suivante :

Théorème 4.7. *Soit G un groupe de Lie nilpotent connexe, simplement connexe non-abélien. Alors, en utilisant les notations précédentes,*

$$\overline{\bigoplus_{\varepsilon\in\{-1,1\}^d}^{\perp} \left(\sum_{u\in G} L^2_{u,\varepsilon}(G)\right)}^{L^2(G)} = L^2(G).$$

Ici la somme extérieure est une somme directe orthogonale, alors que la somme à l'intérieur ne l'est pas.

Démonstration. Appelons $\mathcal{V}$ l'espace dans le membre de gauche de l'égalité ci-dessus. Alors $\mathcal{V}$ est invariant par translation à gauche, comme tous les espaces $L^2_{u,\varepsilon}(G)$ le sont aussi.

De plus, $\mathcal{V}$ est invariant par conjugaison, par construction, il est invariant par translation à droite.

Pour presque toute représentation $\pi_l \in \widehat{G}$, il existe $\varepsilon \in \{-1,1\}^d$ telle que $l \in \mathcal{A}_\varepsilon$. Pour cet ε et pour les éléments $U_{1,\varepsilon}, \ldots, U_{d,\varepsilon} \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, il est possible de construire une application $\varphi \in \mathcal{S}_\varepsilon(G) \subset L^2_\varepsilon(G)$ telle que $\pi_l(\varphi)$ est un opérateur non nul de rang un. En conclusion $\mathcal{V} = L^2(G)$, par le corollaire 4.1. $\square$

Remarque. Le théorème précédent donne une décomposition de l'espace $L^2(G)$ comme somme de noyaux d'opérateurs aux dérivées partielles bien choisis. Malheureusement, cette somme n'est pas directe, même si elle est formée de grands blocs orthogonaux.

Pour chaque ε tel que $\mathcal{A}_\varepsilon \neq \emptyset$, la restriction de la représentation régulière gauche au sous-espace $L^2_\varepsilon(G)$ se désintègre en représentations irréductibles π_l avec les multiplicités 1 pour presque toute $l \in \mathcal{A}_\varepsilon$ (mod $\mathrm{Ad}^*(G)$) et 0 sinon.

Ceci reste vrai pour tout $L^2_{u,\varepsilon}(G)$, car $L^2_{u,\varepsilon}(G)$ est déduit de $L^2_\varepsilon(G)$ par conjugaison.

4.14 Retour au groupe de Heisenberg

Le cas du groupe de Heisenberg H_n de dimension $2n+1$ a été étudié dans [L-M].

Dans ce cas, $d = n$, $\mathcal{A}_\varepsilon \neq \emptyset$ si et seulement si $\varepsilon = (1,1,\ldots,1)$ ou $\varepsilon = (-1,-1,\ldots,-1)$. Posons $\mathrm{sgn}(\varepsilon) = +$ si $\varepsilon = (1,1,\ldots,1)$ et $\mathrm{sgn}(\varepsilon) = -$ si $\varepsilon = (-1,-1,\ldots,-1)$.

Les opérateurs $U_{k,\varepsilon}$ sont donnés par $U_{k,\varepsilon} = X_k + i\ \mathrm{sgn}(\varepsilon) Y_k$.

La somme du théorème 13.7 peut être remplacée par une somme directe si on restreint le choix des éléments $u \in H_n$.

En effet, pour $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = a + ib \in \mathbb{C}^n$, $a, b \in \mathbb{R}^n$, définissons

$$u_{(\alpha,\varepsilon)} = \exp(\sum_{k=1}^{n}(a_k X_k + b_k Y_k)) \in H_n \text{ si } \operatorname{sgn}(\varepsilon) = +$$

et

$$u_{(\alpha,\varepsilon)} = \exp(\sum_{k=1}^{n}(-a_k X_k + b_k Y_k)) \text{ si } \operatorname{sgn}(\varepsilon) = -.$$

Alors $(X_k + i \operatorname{sgn}(\varepsilon) Y_k)^{u_{\alpha,\varepsilon}} = X_k + i \operatorname{sgn}(\varepsilon) Y_k + i\alpha_k Z$, pour $k = 1, \ldots, n$ et

$$L^2(H_n) = \overline{\bigoplus_{\alpha\in\mathbb{C}^n}\left(L^2_{\alpha,+}(H_n) \oplus L^2_{\alpha,-}(H_n)\right)}^{L^2(H_n)}$$

où

$$L^2_{\alpha,+}(H_n) = L^2_{u_{(\alpha,\varepsilon)},\varepsilon}(H_n) \text{ avec } \varepsilon = (1, 1, \ldots, 1)$$

et

$$L^2_{\alpha,-}(H_n) = L^2_{u_{(\alpha,\varepsilon)},\varepsilon}(H_n) \text{ avec } \varepsilon = (-1, -1, \ldots, -1).$$

De plus, dans [L-M] une décomposition plus fine est prouvée : pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^n$, soit

$$L^2_{(\alpha,\beta),\pm}(H_n) = \overline{\{\ f \in \mathcal{S}(H_n) \mid f * (X_k \pm iY_k + i\alpha_k Z) = -i\beta_k f,\ k = 1, \ldots, n\ \}}^{L^2(H_n)}.$$

D'où

$$L^2(H_n) = \overline{\bigoplus_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^{2n}}\left(L^2_{(\alpha,\beta),+}(H_n) \oplus L^2_{(\alpha,\beta),-}(H_n)\right)}^{L^2(H_n)}.$$

Mais les mêmes arguments que ceux développés dans [Lu. Mo.] montrent que la décomposition de $(*)$ est suffisante. En particulier, pour $\beta \neq 0$,

$$L^2_{(\alpha,\beta),\pm}(H_n) \subset \overline{\bigoplus_{\alpha'\in\mathbb{C}^n}\left(L^2_{\alpha',+}(H_n) \oplus L^2_{\alpha',-}(H_n)\right)}^{L^2(H_n)}.$$

Donc, dans le cas du groupe de Heisenberg, on obtient une décomposition de $L^2(H_n)$ en somme directe ou, plus précisément, une fermeture de somme directe et donc une désintégration complète de la représentation régulière gauche avec multiplicités 0 et 1.

Bibliographie

[A] J. Andele, *Noyaux d'opérateurs sur les groupes de Lie exponentiels*, thèse, Université de Metz, (1997).

[Ba] K. I. Babenko, *An inequality in the theory of Fourier integrals*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 25(1961), 531-542 ; English translation., Amer. Math. Soc. Transl. (2), 44 (1965),115-128.

[B-A] P. Bernat, N. Conze, M. Duflo, M. Levy-Nahas, M. Rais, P. Renouard et M. Vergne *Représentations des groupes de Lie résolubles*, Dunod, Paris, (1972).

[B-S-L] A. Baklouti, K. Smaoui et J. Ludwig, *Estimate of the L^p-Fourier transform norm on nilpotent Lie groups*, Journal of Functional Analysis, 199 (2003), 508-520.

[Be] W. Beckner, *Inequalities in Fourier analysis*, Ann. of Math., 102(1975), 159-182.

[Bo] J. Boidol, *$*$-Regularity of Exponential Lie groups*, Inventiones math., 56 (1980), 231-238.

[C-G] L. Corwin et P. Greenleaf, *Representations of nilpotent Lie groupes and their applications. Part 1 : Basic theory and examples*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 18 (1990).

[D-M] M. Duflo et C. C. Moore, *On the regular representation of a non-unimodular locally compact group*, J. Funct. Anal., 21 (1976), 209-243.

[D-R] M. Duflo et M. Rais, *Sur l'analyse harmonique sur les groupes de Lie résolubles*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 9 (1976), 107-144.

[E-T] P. Eymard et M. Terp, *La transformation de Fourier et son inverse sur le groupe des $ax+b$ d'un corps local*, Lecture notes in Mathematics, vol. 739, Springer (1979), 207-278.

[Fo] J. J. F. Fournier, *Sharpness in Young's inequality for convolution*, *Pacific J. Math.*, 72, (1977), 383-397.

[F-R] J. J. F. Fournier et B. Russo, *Abstract interpolation and operator-valued kernels*, J. London Math. Soc, 16 (1977), 283-289.

[Fu] H. Führ, *Hausdorff-Young inequalities for non-unimodular groups*, preprint.

[He] S. Helgason *The Radon transform*, Second Edition, Progress in Math. 5, Birkhäuser, Boston, (1999).

[Ho] R. Howe, *On a connectin between nilpotent groups and oscillator integrals associated to singularities*, Pacific J. Math. 73, No.2 (1977), 329-363.

[In] J. Inoue, *L^p-Fourier transforms on nilpotent Lie groups and solvable Lie groups acting on Siegel domains*, Pacific J. Math., vol 155, 2 (1992), 295-318.

[K-L] A. Kleppner et R. L. Lipsman, *The Plancherel formula for group extensions*, I et II, Ann Sci. Ecole Norm. Sup. 5 (1972), 459-516 ; ibid. 6 (1973), 103-132.

[K-R] A. Klein et B. Russo, *Sharp inequalities for Weyl operators and Heisenberg groups*, Math. Ann. Springer, 235, (1978), 175-194.

[Ku] R.A. Kunze, *L^p-Fourier transforms on locally compact unimodular groups*, Trans. Amer. Math. Soc, 89 (1958), 519-540.

[Lu] J. Ludwig, *Irreducible representations of exponential solvable Lie groups and operators with smooth kernels*, J. Reine Angew. Math., 339 (1983), 1-26.

[L-L] H. Leptin et J. Ludwig, *Unitary representation theory of exponential Lie groupes*, de Gruyter Expositions in Mathematics, vol. 18, Walter de Gruyter & Co., Berlin, (1994).

[L-M] J. Ludwig et C. Molitor-Braun, *Fine disintegration of the left regular representation*, preprint.

[Lu-Mu] J. Ludwig et D. Müller, *Sub-Laplacians of Holomorphic L^p-type on rank One AN- Groups and Related Solvable Groups*, J. Func. Anal. 170 (2000), 366-427.

[L-Z] J. Ludwig et H.Zahir, *On the nilpotent $*$-Fourier transform*, Letters in Mathematical Physics 30, (1994), 22-34.

[Ma] G. Mackey, *Borel structure in groups a nd their duals*, Trans. Amer. Math. Soc. 85 (1957), 134-165.

[Pu] L. Pukanszky, *Unitary representations of solvable Lie groups*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4 (1971), 457-608.

[P-S] I.I. Pyatetskii-Shapiro, *Automorphic functions and the geometry of classical domains*, Gordon and Breach., New-York, (1969).

[Ru1] B. Russo, *The norm of the L^p-Fourier transform, II*, Canad. J. Math, 28 (1976), 1121-1131.

[Ru2] B. Russo, *On the Hausdorff-Young theorem for integral operators*, Pacific J. Math, 68 (1977), 241-253.

[Ru3] B. Russo, *The norm of the L^p-Fourier transform on unimodular groups*, Trans. Amer. Math. Soc, 192 (1974), 293-305.

[Su1] C. Sutherland, *L^2 version of Wiener's Tauberian theorem*, C.R. Acad. Sci. Paris,t. 308, Série I (1989), 543-547.

[Te] M. Terp, *L^p-Fourier transformation on non-unimodular locally compact groups*, preprint.