Thèse

Présentée à

l'Université Paul Verlaine - Metz

Pour obtenir le grade de Docteur de l'Université Paul Verlaine - Metz
Spécialité : Mathématiques pures

par

Majdi BEN HALIMA

Opérateurs Différentiels Invariants sur des Espaces Homogènes : Règles de Branchement et Applications Géométriques et Analytiques

---

Soutenue publiquement le 29 juin 2006

Membres du jury :

Jean-Louis Clerc	Examinateur	Professeur, Nancy I
Simone Gutt	Examinatrice	Professeur, Metz
Joachim Hilgert	Rapporteur	Professeur, Paderborn
Olivier Mathieu	Rapporteur	Professeur, Lyon I
Angela Pasquale	Examinatrice	Professeur, Metz
Martin Schlichenmaier	Examinateur	Professeur, Luxembourg
Tilmann Wurzbacher	Directeur de Thèse	Professeur, Metz

Laboratoire de Mathématiques et Applications de Metz
CNRS UMR 7122, Ile du Saulcy, F-57045 Metz Cedex 1

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur Tilmann Wurzbacher, mon Directeur de thèse, qui m'a encadré durant ces années avec beaucoup de générosité, de patience et de compétence.

J'exprime ma sincère gratitude à Monsieur Hilgert et Monsieur Mathieu pour avoir accepté de rédiger un rapport sur cette thèse.

Je remercie chaleureusement Madame Gutt, Madame Pasquale, Monsieur Clerc et Monsieur Schlichenmaier de me faire l'honneur d'être examinateurs dans le jury.

Je remercie également tous les membres du laboratoire L.M.A.M pour m'avoir accueilli et encouragé durant cette période.

Je n'oublie pas non plus mes amis qui m'ont gratifié de leur soutien et de leur amitié.

Enfin, je remercie toute ma famille, et tout particulièrement mes parents, qui ont toujours été présents à mes cotés.

Table des matières

Introduction et résumé de la thèse

Dans sa première partie, le présent travail se place dans le cadre général suivant. Considérons une variété riemannienne compacte M et un fibré vectoriel C^∞, E, au dessus de M. Si D est un opérateur différentiel elliptique auto-adjoint agissant sur les sections de E, alors il est bien connu que le spectre de D est un ensemble infini discret de nombres réels et que chaque valeur propre est de multiplicité finie. Il s'avère important d'étudier en détail les spectres de certains opérateurs différentiels naturels, et ce pour des raisons analytiques et géométriques (voir, par exemple, [BGM], [Ch], [LM]).

Dans le cadre particulier des espaces homogènes compacts, on trouve dans la littérature quelques situations où des spectres d'opérateurs différentiels invariants sont explicitement déterminés. Ainsi, les valeurs propres du laplacien de Hodge agissant sur les formes différentielles sur S^n et $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sont données par des résultats dans [IT]. On peut aussi citer l'exemple de l'opérateur de Dirac agissant sur les champs de spineurs sur $\mathbb{P}^{2\,m-1}(\mathbb{C})$ pour lequel le spectre est complètement connu (voir [CFG] et [SS], et aussi notre appendice A). De même, le spectre de l'opérateur de Dirac sur les grassmanniennes complexes $Gr_2(\mathbb{C}^{m+2})$ (m pair) est décrit dans [Mil]. Des formules explicites de spectres sont aussi obtenues pour d'autres opérateurs différentiels invariants tels que le laplacien de Bochner et le laplacien de Lichnerowicz sur S^n (voir [Br]). Or les espaces homogènes sont trés souvent utilisés comme modèles pour des géométries plus générales, il est fort naturel d'essayer de déterminer les spectres de ce type d'opérateurs sur des espaces homogènes.

Considérons un espace riemannien symétrique orientable $M = G/K$ de dimension n, où G est un groupe de Lie compact et K est un sous-groupe fermé de G. Soit $(\tau\,,\,(E_0\,,\,\langle\ ,\ \rangle))$ une représentation unitaire de dimension finie de K, et soit $E = G \times_{K\,,\,\tau} E_0$ le fibré vectoriel homogène associé au dessus de M. L'espace $\Gamma(M\,,\,E)$ des sections continues de E est muni d'une structure de G-module donnée par l'action suivante :

$$(g \cdot s)(x) = gs(g^{-1}x)$$

pour $g \in G$, $s \in \Gamma(M\,,\,E)$ et $x \in M$. Choisissons un élément de volume G-invariant ω sur M tel que

$$\int_M f\,\omega = \int_G f(gK)\,dg$$

pour tout $f \in C(M)$. On définit un produit scalaire G-invariant $(\ ,\ )$ sur $\Gamma(M\,,\,E)$ par

$$\begin{aligned}(\,s_1\,,\,s_2\,) &= \int_M \langle\, s_1\,,\,s_2\,\rangle\,\omega \\ &= \int_G \langle\, s_1(gK)\,,\,s_2(gK)\,\rangle\,dg\,.\end{aligned}$$

En tant que G-module, l'espace $L^2(M\,,\,E)$ des sections de carré intégrable de

E se décompose via le théorème de Peter-Weyl et la réciprocité de Frobenius comme suit :

$$L^2(M\,,\,E) \cong \widehat{\bigoplus_{\gamma\in\widehat{G}}}\; V_\gamma \otimes Hom_K(V_\gamma\,,\,E_0).$$

Si par exemple $E = \bigwedge^p (T^*M)^{\mathbb{C}}$, on obtient en fixant un produit scalaire G-invariant $\langle\ ,\ \rangle$ sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, un produit scalaire $(\ ,\ )_M$ sur l'espace $\Omega^p(M) = \Gamma^\infty(M\,,\,\bigwedge^p (T^*M)^{\mathbb{C}})$ des formes différentielles de degré p sur M. Il est bien connu que le laplacien de Hodge $\Delta = d\,d^* + d^*d$ agissant sur $\Omega^p(M)$ s'identifie avec l'élément de Casimir $\Omega_G = -\sum_{j=1}^n X_j^2$, où $\{X_1, ..., X_n\}$ est une base orthonormale de $\mathfrak{g}$ relativement à $\langle\ ,\ \rangle$ (voir, par exemple, notre appendice A).

De façon similaire, si L est un fibré homogène complexe de rang un au dessus de M et si $\nabla^*\nabla$ est le laplacien de Bochner usuel agissant sur les sections du fibré L, alors on peut montrer que $\nabla^*\nabla$ s'identifie avec un opérateur de type $\Omega_G + c\,Id$, où c est une constante (voir, par exemple, $[BH]$).

Supposons de plus que l'espace $M = G/K$ est simplement connexe et muni d'une structure spin. Soit S le fibré des spineurs associé à l'unique structure spin sur M. L'opérateur de Dirac D agissant sur les sections du fibré homogène S est un opérateur différentiel invariant dont le carré s'identifie avec l'opérateur $\Omega_G + \frac{R}{8}$, où R est la courbure scalaire de M (voir $[F]$ ou notre appendice A). Puisque M est un espace riemannien symétrique, il est à noter que le spectre de l'opérateur de Dirac est symétrique par rapport à l'origine et donc complètement déterminé par le spectre de D^2.

Le calcul des spectres des trois opérateurs différentiels invariants mentionnés ci-dessus nous ramène à étudier la situation suivante. Soit $\mathcal{D}$ un opérateur différentiel G-invariant opérant sur les sections du fibré $E = G \times_{K\,,\,\tau} E_0$. Supposons que $\mathcal{D}$ s'identifie avec l'élément de Casimir Ω_G de G. Par un résultat standard, on sait qu'un tel opérateur agit de manière scalaire sur les G-modules $V_\gamma \otimes Hom_K(V_\gamma\,,\,E_0)$. Par suite, la détermination complète du spectre de $\mathcal{D}$ se réduit au problème de trouver toutes les représentations irréductibles de G qui, par restriction à K, entrelacent non trivialement la représentation τ (i.e., $Hom_K(V_\gamma\,,\,E_0) \neq \{0\}$), ainsi que le calcul des multiplicités des valeurs propres, i.e., des dimensions de $Hom_K(V_\gamma\,,\,E_0)$.

Si π est une représentation irréductible de G, on note $\pi\big|_K$ la restriction de π au sous-groupe K. On appelle règle de branchement pour π, la description de la décomposition en irréductibles de la représentation $\pi\big|_K$. On remarque ainsi que le calcul du spectre de $\mathcal{D}$ revient à étudier des règles de branchement de G à K.

Considérons à présent la paire symétrique $(G\,,\,K) = (U(n+m)\,,\,U(n) \times U(m))$. Notons que l'espace quotient G/K est difféomorphe à la grassmannienne $Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$ des n-plans complexes dans $\mathbb{C}^{n+m}$. De même, $Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$ est difféomorphe à l'espace riemannien symétrique $SU(n+m)/S(U(n)\times U(m))$.

La première partie de cette thèse est motivée par la détermination des spectres des opérateurs différentiels invariants discutés ci-dessus dans le cas où M est la grassmanienne complexe $Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$ avec $n \geq m \geq 1$. Afin d'atteindre cet objectif, on a d'abord commencé par étudier les règles de branchement de $U(n+m)$ à $U(n) \times U(m)$ et de $SU(n+m)$ à $S(U(n) \times U(m))$. Notons que pour $m = 1$, ces problèmes de branchement sont complètement résolus (voir, par exemple, $[Kn2]$, $[CFG]$, $[IT]$). En se basant sur le théorème de Littlewood-Richardson pour le groupe unitaire $U(n+m)$ (voir, par exemple, $[Kn2]$), on a démontré un résultat combinatoire décrivant de façon explicite les multiplicités de branchement dans la réduction de $U(n+m)$ à $U(n) \times U(m)$, où $n \geq m > 1$. Ce résultat était énoncé par J. Mickelsson dans $[Mic1]$, mais seulement le cas $n = m = 2$ y est prouvé.

En particulier, pour τ_λ et τ_μ deux représentations irréductibles respectivement de $U(n+m)$ et $U(n) \times U(m)$ $(n \geq m \geq 1)$ de plus haut poids $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_{n+m})$ et $\mu = (a, ..., a)(0, ..., 0)$ $(a \in \mathbb{Z})$, on a montré que la multiplicité

$$m(\lambda\,,\,\mu) := m_{\tau_\lambda\big|_{U(n)\times U(m)}}(\tau_\mu)$$

est égale à 0 ou 1, et on a donné les conditions nécessaires et suffisantes sur λ pour que cette multiplicité soit non nulle.

Par la suite, en utilisant des arguments élémentaires en théorie des représentations des groupes de Lie compacts, on a déduit la règle de branchement de $SU(n+m)$ à $S(U(n) \times U(m))$ à partir du résultat fondamental pour le passage de $U(n+m)$ à $U(n) \times U(m)$. Cette approche nous a aussi permi d'obtenir la règle de branchement de $SU(n+m)$ à $SU(n) \times SU(m)$.

Soit le fibré déterminant $Det = \big\{(E\,,\,v) \in Gr_n(\mathbb{C}^{n+m}) \times \bigwedge^n(\mathbb{C}^{n+m})\ ;\ v \in \bigwedge^n(E)\big\}$ au dessus de la grassmannienne $M = Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$. En tant que fibré vectoriel homogène, Det est isomorphe à $E = G \times_{K\,,\,\rho} \mathbb{C}$, où ρ est la représentation unidimensionelle de K donnée par

$$\rho\left(\left(\begin{array}{cc} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{array}\right)\right) = det(k_1).$$

Pour $a \in \mathbb{Z}$, on note par $\nabla_a^*\nabla_a$ le laplacien de Bochner agissant sur les sections du fibré $Det^{\otimes a}$. Comme application de la règle de branchement de $U(n+m)$ à $U(n) \times U(m)$, on s'est proposé de déterminer les valeurs propres des opérateurs $\nabla_a^*\nabla_a$. Le résultat qu'on a obtenu est le suivant :

Proposition *Pour $a \in \mathbb{Z}$ et $n \geq m \geq 1$, le spectre de ${\nabla_a}^*\nabla_a$ agissant sur $\Gamma^\infty(\,Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})\,,\,Det^{\otimes a}\,)$ est donné par*
$Spec_{\,{\nabla_a}^*\nabla_a}\,(\,\Gamma^\infty(\,Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})\,,\,Det^{\otimes a}\,)\,) = \big\{\lambda_b = 2\,\big(\sum_{j=1}^m b_j(b_j + n + m - 2j + 1 + a)\big) + n\,m\,a\,;\, b = (\,b_1, ..., b_m\,) \in \mathbb{N}^m$ avec $b_1 \geq ... \geq b_m \geq Sup\,\{0\,,\,-a\}\big\}$.

Par la suite, on s'est intéressé à l'étude du spectre de l'opérateur de Dirac D sur $Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$. Identifiée à l'espace riemannien $SU(n+m)/S(U(n) \times U(m))$, la grassmannienne $Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$ admet une structure spin si et seulement si $n+m$ est pair. Supposons que cette condition est satisfaite et considérons le fibré des spineurs S associé à l'unique structure spin sur $M = Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$. A isomorphisme près, on a la décomposition suivante :

$$S = S_0 \oplus ..... \oplus S_{n\,m}\,,$$

où $S_{n\,m}$ est la racine carrée du fibré canonique, $S_{n\,m}^2 = K_M := \bigwedge^{n\,m,\,0} M := \bigwedge^{n\,m} (T^{1,0}\,M)^*$, et $S_r = \overline{\bigwedge^{n\,m-r\,,\,0} M} \otimes S_{n\,m}$ pour tout $0 \leq r \leq nm$. Notons que, dans cette description, S_0 et S_{nm} sont les seuls sous-fibrés de rang un dans la décomposition $SU(n+m)$-équivariante du fibré S. De plus, on observe que

$$S_0 \cong Det^{\otimes(-\frac{n+m}{2})} \quad \text{et} \quad S_{nm} \cong Det^{\otimes(\frac{n+m}{2})}.$$

Par identification des fibrés ci-dessus, la formule de Schrödinger-Lichnerowicz combinée avec le résultat donnant les valeurs propres du laplacien de Bochner sur les fibrés $Det^{\otimes a}$ ($a \in \mathbb{Z}$) nous ont permi d'obtenir :

Corollaire *Pour $n \geq m \geq 1$, on a :*
(1) $Spec_{D^2}(\,\Gamma^\infty(Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})\,,\,S_0)\,) = \big\{\lambda_b = \frac{1}{2(n+m)}\big(\sum_{j=1}^m b_j(2\,b_j + n + m - 4\,j + 2)\big)\,;\; b = (\,b_1, ..., b_m\,) \in \mathbb{N}^m$ *avec* $b_1 \geq .... \geq b_m \geq \frac{n+m}{2}\big\}$.
(2) $Spec_{D^2}(\,\Gamma^\infty(Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})\,,\,S_{n\,m})\,) = \big\{\lambda_b = \frac{1}{2(n+m)}\big(\sum_{j=1}^m b_j(2\,b_j + 3\,n + 3\,m - 4\,j + 2)\big) + \frac{n\,m}{2}\;\;; b = (\,b_1, ..., b_m\,) \in \mathbb{N}^m$ *avec* $b_1 \geq .... \geq b_m \geq 0\big\}$.

Bien évidemment, on peut aussi déduire ce résultat en utilisant la règle de branchement de $SU(n+m)$ à $S(U(n) \times U(m))$.

Dans le dernier exemple de calcul de spectres, on a traité le laplacien de Hodge Δ agissant sur les fonctions C^∞ à valeurs complexes sur l'espace total du fibré déterminant unitaire $U(Det) = \{(E\,,\,v) \in Det\,;\, \|v\| = 1\} \longrightarrow Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$. Notons que $U(Det)$ est difféomorphe au quotient $SU(n+m)/SU(n) \times SU(m)$. En appliquant le théorème classique de Peter-Weyl et la règle de branchement de $SU(n+m)$ à $SU(n) \times SU(m)$, on a obtenu :

Proposition *Pour $n \geq m \geq 1$, le spectre du laplacien de Hodge Δ opérant sur $C^\infty(\,U(Det)\,)$ est donné par*
$Spec_\Delta(C^\infty(\,U(Det)\,)) = \big\{\,\frac{1}{n+m}\big(\sum_{j=1}^m b_j\,(b_j + n + m - 2\,j + 1 + a)\big) + \frac{n\,m\,a}{2(n+m)} + \frac{n\,m\,a^2}{2(n+m)^2}\;\;; a \in \mathbb{Z}\,,\, b = (\,b_1, ..., b_m\,) \in \mathbb{N}^m$ *avec* $b_1 \geq ... \geq b_m \geq Sup\,\{0\,,\,-a\}\big\}$.

La deuxième partie de cette thèse s'inscrit dans de le cadre de l'étude des "espaces homogènes flous". Cette terminologie a été introduite en physique théorique pour désigner des algèbres de matrices particulières qui approchent, dans un certain sens, un espace homogène G/K. L'exemple fondamental de la "2-sphère floue" donne une idée de cette notion. En effet, soient $G = SU(2)$, $K = S(U(1) \times U(1))$, et $\langle\;,\;\rangle$ la métrique riemannienne sur $G/K \cong S^2$ induite par la forme de Killing sur $\mathfrak{su}(2)$. Soit V_k l'espace des polynômes homogènes de degré k sur $\mathbb{C}^2$. Rappelons que V_k est un G-module irréductible et que

$$L^2(S^2\,,\,\mathbb{C}) \cong L^2(G/K\,,\,\mathbb{C}) \cong \widehat{\bigoplus_{k\,\in\,\mathbb{N}}}\; V_{2\,k}\,.$$

Sachant que les représentations irréductibles de $SU(2)$ sont auto-duales, une application de la formule de Clebsch-Gordan nous donne :

$$V_{_N}^* \otimes V_{_N} \cong V_{_N} \otimes V_{_N} \cong \bigoplus_{k=0}^{N} V_{2\,k}\,.$$

Ainsi, l'algèbre $\mathcal{A}_{_N} := End_{\mathbb{C}}(V_{_N}) \cong Mat(N+1,\mathbb{C})$ apparaît comme une "troncation à l'ordre N" de $L^2(S^2\,,\,\mathbb{C})$.

Motivé par l'existence de cette approximation naturelle, J. Madore a developpé dans [$Ma1$] quelques notions de géométrie non-commutative sur les algèbres $\mathcal{A}_{_N}$ et a précisé le sens dans lequel la géométrie de S^2 est une "limite de géométries matricielles". Dans [GS], H. Grosse et A. Strohmaier ont montré que l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ peut aussi être traité comme un espace homogène flou. Des résultats classiques dans la théorie de la quantification de Toeplitz-Berezin (appelée parfois quantification de Toeplitz) des variétés kähleriennes ont été utilisés par ces auteurs pour préciser le sens de l'approximation de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ par des algèbres de matrices. En s'appuyant sur la théorie de la quantification géométrique des fibrés vectoriels introduite par E. Hawkins (voir [$Ha1$] et [$Ha2$]), Grosse et Strohmaier ont donné une définition des spineurs sur la "version floue" de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ et d'un opérateur de Dirac y agissant. Il s'avère que le spectre de cet opérateur est une "tronquation" du spectre de l'opérateur de Dirac $Spin^{\mathbb{C}}$ canonique sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Plus généralement, on sait maintenant que tous les espaces projectifs complexes $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ peuvent être considérés comme des espaces homogènes flous (voir, par exemple, [$BDLMO$]). Cette notion a aussi été étendue au cas des grassmanniennes complexes par B.P. Dolan et J. Olivier (voir [DO]).

Dans l'étude qui suit, on a essayé de généraliser en dimension supérieure (pour $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = Gr_1(\mathbb{C}^{n+m})$ et $Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$) quelques idées développées dans [$Ma1$] et [GS] (cas de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, respectivement). Identifions $M = Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$ avec l'espace riemannien symétrique $SU(n+m)/S(U(n) \times U(m))$, et fixons sur M la métrique induite par la forme de Killing. Une application de la règle de branchement de $SU(n+m)$ à $S(U(n) \times U(m))$ nous a permi de décomposer en irréductibles le $SU(n+m)$-module $L^2(M)$ des fonctions de carré intégrable sur M. Cette décomposition est de la forme

$$L^2(M) \cong \widehat{\bigoplus_{\substack{b=(b_1,\ldots,b_m)\,\in\,\mathbb{N}^m \\ b_1\,\geq\,\ldots\,\geq\,b_m}}} W(b),$$

où les sommantes $W(b)$ sont irréductibles. Soit $L = Det^*$ le dual du fibré déterminant au dessus de la grassmannienne $Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$. Par le théorème de Borel-Weil, on sait que $\mathcal{H}_{_N} := \Gamma_{hol}(M\,,\,L^{\otimes N})$ $(N \in \mathbb{N}^*)$ est un $SU(n+m)$-module irréductible de dimension finie. De plus, on montre que

$$\mathcal{A}_{_N} := End_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_{_N}) \cong \widehat{\bigoplus_{\substack{b=(b_1,\ldots,b_m)\,\in\,\mathbb{N}^m \\ N\,\geq\,b_1\,\geq\,\ldots\,\geq\,b_m}}} W(b),$$

ce qui donne une preuve directe (et purement en termes de la théorie des représentations) du fait que $Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$ admet des approximations par des variétés homogènes floues. En spécialisant quelques arguments standards de la théorie de la quantification de Toeplitz des variétés kähleriennes au cas de la grassmannienne $M = Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$, on a clarifié le sens dans lequel la suite des algèbres $\mathcal{A}_{_N}$ converge vers $C^\infty(M)$. Par la suite, on s'est basé sur la définition de M. Dubois-Violette d'un calcul différentiel non-commutatif sur une algèbre de matrices $Mat(n, \mathbb{C})$ (voir [D-V] et [D-VKM]) pour introduire l'espace $\Omega^p(\mathcal{A}_{_N})$ des p-formes sur $\mathcal{A}_{_N}$ et de l'analogue non-commutatif de la différentielle de de Rham sur les p-formes, compatible avec l'application de Toeplitz $T_{_N} : C^\infty(M) \longrightarrow \mathcal{A}_{_N}$. On a ensuite construit un “laplacien flou” $\Delta^p_{_N}$ agissant sur $\Omega^p(\mathcal{A}_{_N})$ dont le spectre “converge”, lorsque $N \to \infty$, vers le spectre du laplacien de Hodge sur les p-formes.

Soit $\mathcal{A}_{_N} = End_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_{_N})$, où $\mathcal{H}_{_N}$ est maintenant un $SU(n{+}1)$-module irréductible de plus haut poids $\mu = (N, ..., N)$. Dans [$Ha1$], E. Hawkins a developpé une théorie de quantification des fibrés vectoriels homogènes au dessus des orbites coadjointes compactes. Cette théorie générale permet en particulier de quantifier le fibré des spineurs S au dessus de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ (n impair) en l'associant une suite dont le N-ième terme est un $\mathcal{A}_{_N}$-module projectif $\mathcal{M}^S_{_N} = Hom_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}^S_{_N}, \mathcal{H}_{_N})$, où $\mathcal{H}^S_{_N}$ est un certain $SU(n{+}1)$-module. En appliquant le théorème de Littlewood-Richardson pour le groupe unitaire $U(n+1)$, on a dérivé la décomposition en irréductibles de $\mathcal{M}^S_{_N}$. On a immédiatement observé que $\mathcal{M}^S_{_N}$ est isomorphe à une “tronquation” de l'espace $L^2(M\, , S)$ des sections de carré intégrable du fibré S. Cette observation nous a permi de définir un “opérateur de Dirac flou” $D_{_N}$ agissant sur le module $\mathcal{M}^S_{_N}$ tel que, à la limite $N \to \infty$, le spectre de $D_{_N}$ recouvre celui de l'opérateur de Dirac classique sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

De façon analogue, pour $L = Det^* \longrightarrow M = Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$, les résultats dans [$Ha1$] permettent de quantifier l'espace $\Gamma^\infty(M\, , L^{\otimes k})$ ($k \in \mathbb{Z}$) par une suite dont le N-ième terme est un $\mathcal{A}_{_N}$-module projectif $\mathcal{M}^{L^{\otimes k}}_{_N} = Hom_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}^{L^{\otimes k}}_{_N}, \mathcal{H}_{_N})$, où $\mathcal{H}^{L^{\otimes k}}_{_N}$ est un $SU(n+m)$-module irréductible, et $\mathcal{H}_{_N}$ et $\mathcal{A}_{_N}$ sont comme avant. En utilisant un cas particulier du branchement de $SU(n{+}m)$ à $S(U(n) \times U(m))$ résolu précédement, on a prouvé qu'il existe un unique $SU(n+m)$-sous module $\Gamma^k_{_N} \subset L^2(M\, , L^{\otimes k})$ qui est isomorphe à $\mathcal{M}^{L^{\otimes k}}_{_N}$. Ceci nous donne une interprétation simple de la quantification du fibré $L^{\otimes k}$. On a ensuite proposé une définition d'un “laplacien de Bochner flou” agissant sur $\mathcal{M}^{L^{\otimes k}}_{_N}$, dont le spectre recouvre à la limite $N \longrightarrow \infty$ celui du laplacien de Bochner classique.

L'appendice A de notre étude vise principalement à analyser le problème du calcul des spectres de certains opérateurs différentiels invariants sur des fibrés vectoriels homogènes. Dans la première section de cet appendice, on a donné quelques définitions fondamentales en liaison avec les opérateurs différentiels géométriques dont la notion d'ellipticité. On a ensuite détaillé un certain nombre d'exemples d'opérateurs différentiels elliptiques. Dans la deuxième section, on a d'abord essayé de rappeler les définitions et propriétés de base sur les espaces et les fibrés vectoriels homogènes (voir [Wa], [He]). Par la suite, en suivant l'exposition dans [Wa], on a étudié la notion d'opérateur différentiel invariant et donné quelques propriétés sous-jacentes. La troisième section est consacrée à l'étude de la décomposition en irréductibles des espaces de sections continues et L^2 d'un fibré homogène arbitraire. Dans la section finale, on a expliqué l'algorithme général permettant de calculer le spectre du laplacien de Hodge sur les formes différentielles et celui de l'opérateur de Dirac sur les champs de spineurs au dessus d'un espace riemannien symétrique compact. Comme applications de cet algorithme, on a d'abord calculé le spectre du laplacien de Hodge Δ opérant sur les formes différentielles de bi-degré $(0, q)$ sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ (voir $[IT]$ pour des résultas plus généraux). Ensuite, on a redémontré le résultat donnant les valeurs propres de l'opérateur de Dirac D sur $\mathbb{P}^{2\,m-1}(\mathbb{C})$.

Rappelons que D^2 est un opérateur différentiel elliptique, auto-adjoint et positif de second ordre. La fonction zêta associé au spectre de l'opérateur D^2 sur le fibré des spineurs au dessus de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ $(n = 2\,m - 1)$ est donnée par

$$\zeta(D^2\,,\,s) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}\,(D^2)\setminus\{0\}} \lambda^{-s}\,,$$

où s est une variable complexe et chaque valeur propre non nulle λ est répétée autant de fois que sa multiplicité. Par des considérations générales (voir $[APS2]$, $[Se]$), on sait que $\zeta(D^2\,,\,s)$ est une fonction holomorphe sur le demi-plan complexe $\mathcal{U} = \{s \in \mathbb{C}\,;\ \mathcal{R}e(s) > n\}$. De plus, cette fonction admet une extension méromorphe à tout le plan complexe avec $s = 0$ un point régulier. En tenant compte de ce fait, le déterminant zêta-régularisé de l'opérateur D^2 est défini par

$$Det_\zeta(D^2) := exp\big(-\zeta^{'}(D^2\,,\,0)\big).$$

Similairement, mais plus subtile, on définit le déterminant zêta-régularisé de l'opérateur de Dirac sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ par

$$Det_\zeta(D) := exp\Big(i\,\frac{\pi}{2}\,\big(\zeta(D^2\,,\,0) - \eta(D\,,\,0)\big)\Big)\,exp\Big(-\frac{\zeta^{'}(D^2\,,\,0)}{2}\Big),$$

où $\eta(D\,,\,0)$ est un certain invariant spectral associé à D (voir, par exemple, $[APS1, 2]$). Dans l'appendice B de cette thèse, on dérive des expressions "explicites" (ou plutôt calculables) pour $Det_\zeta(D^2)$ et $Det_\zeta(D)$ en appliquant des méthodes similaires à celles utilisées dans $[BS]$ et $[Sth]$. Il est important de noter que la forme polynômiale des valeurs propres de D^2 ainsi que de leurs multiplicités est à l'origine des méthodes utilisées dans nos calculs.

Pour récapituler, cette thèse est structurée en quatres parties ou chapitres. Dans le premier chapitre, on commence par étudier les règles de branchement de $U(n+m)$ à $U(n) \times U(m)$, de $SU(n+m)$ à $S(U(n) \times U(m))$, et de $SU(n+m)$ à $SU(n) \times SU(m)$. Par suite, on donne des applications de ces règles au calcul des spectres de certains opérateurs différentiels invariants sur la grassmannienne $Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$ $(n \geq m \geq 1)$. Dans le deuxième chapitre, on étudie quelques aspects de la géométrie équivariante des espaces projectifs et des grassmanniennes complexes du point de vue de l'existence des "approximations floues". Les deux derniers chapitres sont respectivement les appendices A et B décrits ci-dessus.

Soulignons que le premier et le deuxième chapitres sont deux articles qui comportent leurs propres introduction et bibliographie. Chacune de ces introductions aspire à donner une description plus précise du plan et des principaux résultats du chapitre correspondant. Les bibliographies du premier et deuxième chapitres sont gardées séparées (à défaut de répéter quelques références) dans le but de faciliter la lecture de cette thèse.

Branching rules for unitary groups and spectra of invariant differential operators on complex Grassmannians

Majdi Ben Halima

Laboratoire de Mathématiques et Applications de Metz
Université Paul Verlaine - Metz et C.N.R.S.
Ile du Saulcy, F-57045 Metz, France
e-mail : benhalim@univ-metz.fr

Abstract

In this paper, we prove a combinatorial rule describing the restriction of any irreducible representation of $U(n+m)$ to the subgroup $U(n) \times U(m)$. We also derive similar rules for the reductions from $SU(n+m)$ to $S(U(n) \times U(m))$, and from $SU(n+m)$ to $SU(n) \times SU(m)$. As applications of these representation-theoretic results, we compute the spectra of the Bochner-Laplacian on powers of the determinant bundle over the complex Grassmannian $Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$. The spectrum of the Dirac operator acting on the spin Grassmannian $Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$ is also partially computed. A further application is given by the determination of the spectrum of the Hodge-Laplacian acting on the space of smooth functions on the unit determinant bundle over $Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$.

2000 Mathematics Subject Classification: 22E45, 05E15, 14M15, 35Pxx.

Keywords: Branching rule, branching theorem, complex Grassmannian, spectra of invariant differential operators.

Introduction

Let G be a compact connected Lie group, and let K be a closed connected subgroup of G. A branching theorem (or branching rule) is a description of the K-irreducible representations and their multiplicities which occur in the decomposition of any irreducible representation of G upon restriction to K. Since the irreducible representations of G and K are parametrized by their highest weights, a branching rule can be stated entirely in terms of these parameters.

In the first part of this paper, we study the branching rules for the passages from $U(n+m)$ to $U(n) \times U(m)$, from $SU(n+m)$ to $S(U(n) \times U(m))$, and from $SU(n+m)$ to $SU(n) \times SU(m)$. In the second part, we compute the spectra of certain invariant differential operators on the compact homogeneous spaces $U(n+m)/(U(n) \times U(m))$, $SU(n+m)/(S(U(n) \times U(m)))$, and $SU(n+$

$m)/(SU(n) \times SU(m))$. Upon calculating the element of the universal enveloping algebra associated to a given invariant differential operator, the corresponding spectrum computation reduces to an application of the branching rules derived in the first part. Similar spectrum calculations have been carried out in the case of $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, e.g., in $[CFG]$ and in $[IT]$ by using the branching rule from $SU(n+1)$ to $S(U(n) \times U(1))$.

The present article is organized as follows. In Section 1, we give a parametrization of the unitary irreducible representations of $U(n+m)$, $U(n) \times U(m)$, $SU(n+m)$, and $S(U(n) \times U(m))$. Section 2 starts with a review of some general facts about polynomial representations of the unitary group $U(k)$. Then we give a complete proof of the Mickelsson branching theorem which describes the decomposition of any polynomial irreducible representation of $U(n+m)$ upon restriction to the subgroup $U(n) \times U(m)$ $(n \geq m \geq 2)$. This proof is based on the Littlewood-Richardson theorem. We easily deduce a generalisation of this branching rule to the case of arbitrary irreducible representations. Using this result, we derive a general formula for the multiplicity of certain irreducible representations of $U(n) \times U(m)$ in the restriction to $U(n) \times U(m)$ of a given irreducible representation of $U(n+m)$ $(n \geq m \geq 1)$. In Section 3, we derive the branching rule for the special unitary group $SU(n+m)$ with respect to the subgroup $S(U(n) \times U(m))$ $(n \geq m \geq 1)$. In Section 4, we show how one can determine which irreducible representation of $SU(n) \times SU(m)$ occurs in the restriction to $SU(n) \times SU(m)$ of a given irreducible representation of $SU(n+m)$ $(n \geq m \geq 1)$.

Let $Det^{\otimes a}$ be a power of the determinant line bundle over the complex Grassmannian $Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$. As an application of the branching from $U(n+m)$ to $U(n) \times U(m)$, we compute, in Section 5, the spectrum of the Bochner-Laplacian on $\Gamma^\infty(\, Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})\, ,\, Det^{\otimes a}\,)$, the space of C^∞ sections of the bundle $Det^{\otimes a}$. Let S be the spinor bundle over the spin Grassmannian $Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$, and let D^2 be the square of the Dirac operator acting on $\Gamma^\infty(\, Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})\, ,\, S\,)$. We derive the spectrum of D^2 on two particular spinor subbundles. As a final example of an application, let $U(Det)$ be the unit determinant bundle over $Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$, and let Δ be its Hodge-Laplacian. We compute its spectrum on $C^\infty(U(Det))$ by using the branching from $SU(n+m)$ to $SU(n) \times SU(m)$.

In an appendix, we derive explicitly the highest weight of a certain irreducible representation needed in the body of the text.

1 Parametrization of irreducible representations for certain unitary groups

Let G be a compact connected Lie group, and let $\mathfrak{g}$ be its Lie algebra. We fix a G-invariant positive definite inner product $\langle\ ,\ \rangle$ on $\mathfrak{g}$ and we write $B = -\langle\ ,\ \rangle$. Let T be a maximal torus in G, and let $\mathfrak{h}$ be its Lie algebra. We denote by $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ and $\mathfrak{h}^\mathbb{C}$ the respective complexifications of $\mathfrak{g}$ and $\mathfrak{h}$. Let $\Delta(\mathfrak{g}^\mathbb{C}\, ,\, \mathfrak{h}^\mathbb{C})$ be the set of roots of $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ relative to $\mathfrak{h}^\mathbb{C}$. The complex bilinear extension of B gives rise to a positive definite form on $\mathfrak{h}_\mathbb{R} := i\mathfrak{h}$. Thus, for each $\lambda \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$, there is a unique element $H_\lambda \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}$ so that $B(H\, ,\, H_\lambda) = \lambda(H)$ for all $H \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}$. Hence we obtain an inner product on $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$ denoted by $\langle\ ,\ \rangle$ such that

$$\langle\, \lambda\, ,\, \mu\, \rangle = \lambda(H_\mu) = \mu(H_\lambda) = B(H_\lambda\, ,\, H_\mu) \qquad \text{for } \lambda,\, \mu\, \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}^*.$$

Let us fix a system $\Delta^+(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}\ ,\ \mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$ of positive roots. We will say that $\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ is **dominant** if $\langle\, \lambda\ ,\ \alpha\,\rangle \geq 0$ for each $\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}\ ,\ \mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$. If $\lambda \in (\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})^*$ is the differential of a multiplicative character ξ_λ of T , i.e., if $\xi_\lambda(\, exp(H)\,) = e^{\lambda(H)}$ for all $H \in \mathfrak{h}$, then it is said to be **analytically integral**. By the theorem of the Highest Weight, an irreducible finite dimensional representation of G is, up to equivalence, uniquely characterized by its highest weight and the highest weight can be any dominant analytically integral linear functional on $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$. Let $\widehat{G}$ be the set of equivalence classes of unitary irreducible representations of G. Then each dominant analytically integral form on $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ will correspond to a unique element of $\widehat{G}$. We shall use this one-to-one correspondence to give explicit parametrizations of $\widehat{G}$ for certain unitary groups.

Let now $G = U(n+m)$, and let $K = U(n) \times U(m)$ with $n \geq m \geq 1$. We denote by $\mathfrak{g}$ and $\mathfrak{k}$, respectively, the Lie algebras of G and K. Let $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ and $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ denote their complexifications. On $\mathfrak{g}$, we use the G-invariant inner product given by

$$\langle\, X\ ,\ Y\,\rangle = \langle\, X\ ,\ Y\,\rangle_{\mathfrak{g}}\ = \text{-Tr}\,(XY) \quad \text{for } X,\, Y \in \mathfrak{g}.$$

Let

$$T = \big\{ A = \mathrm{diag}\,(e^{i\theta_1}, \ldots.., e^{i\theta_{n+m}})\,;\ \theta_j \in \mathbb{R} \ \text{ for } j = 1, ..., n+m \big\}$$

be a maximal torus, and let $\mathfrak{h}$ be its Lie algebra. By complexification of $\mathfrak{h}$, we get the complex Lie algebra

$$\mathfrak{h}^{\mathbb{C}} = \big\{ H = \mathrm{diag}\,(h_1, \ldots., h_{n+m})\,;\ h_j \in \mathbb{C} \ \text{ for } j = 1, ..., n+m \big\},$$

which is a Cartan subalgebra of both $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ and $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$. For $j = 1, ..., n+m$, we define a linear functional on $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ by

$$e_j \begin{pmatrix} h_1 & & \\ & \ddots & \\ & & h_{n+m} \end{pmatrix} = h_j\,.$$

It follows that $\langle\, e_i\ ,\ e_j\,\rangle = \delta_{ij}$ for all $1 \leq i, j \leq n+m$. Observe that the analytically integral members of $(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})^*$ are of the form $\sum_{p=1}^{n+m} a_p e_p$ with $a_p \in \mathbb{Z}$. Let us fix the following system of positive roots

$$\Delta^+(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}\ ,\ \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) \quad = \quad \{e_i - e_j\,; 1 \leq i < j \leq n+m\}.$$

Let $\lambda = \sum_{p=1}^{n+m} \lambda_p e_p$ be an **integral form**, i.e., $\lambda_p \in \mathbb{Z}$ for $p = 1, ..., n+m$. Then λ is the highest weight of an irreducible representation of G if and only if it is dominant relative to $\Delta^+(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}\ ,\ \mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$. Since we have

$$\langle\, \lambda\ ,\ e_i - e_j\,\rangle = \lambda_i - \lambda_j \quad \text{for all } 1 \leq i < j \leq n+m,$$

the condition of dominance of λ is that $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_{n+m}$.

Let $\mu = \sum_{p=1}^{n} l_p e_p + \sum_{p=1}^{m} j_p e_{n+p}$ be an integral form. Since $U(\widehat{n) \times U}(m) \cong \widehat{U(n)} \times \widehat{U(m)}$, we see that μ is the highest weight of an irreducible representation of K if and only if $l_1 \geq \ldots. \geq l_n$ and $j_1 \geq \ldots. \geq j_m$.

Let now $G_1 = SU(n+m)$, and let $K_1 = S(U(n) \times U(m))$ with $n \geq m \geq 1$. Let $\mathfrak{g}_1$ and $\mathfrak{k}_1$ be the respective Lie algebras of G_1 and K_1. Let $\mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}}$ and $\mathfrak{k}_1^{\mathbb{C}}$ denote their complexifications. The Killing form B of $\mathfrak{g}_1$ is nondegenerate and negative-definite. Thus, we obtain a G_1-invariant inner product on $\mathfrak{g}_1$ given by

$$\langle X \, , \, Y \rangle = \langle X \, , \, Y \rangle_{\mathfrak{g}_1} \; = -B(X \, , \, Y) \quad \text{for } X, \, Y \in \mathfrak{g}_1 \, .$$

Let us fix the following maximal torus of G_1 (and K_1)

$$T_1 = \big\{ A = \mathrm{diag}\,(e^{i\theta_1}, ..., e^{i\theta_{n+m-1}}, e^{-i\sum_{j=1}^{n+m-1}\theta_j}) \, ; \, \theta_j \in \mathbb{R} \text{ for all } 1 \leq j \leq n+m-1 \big\}.$$

Let $\mathfrak{h}_1$ be the Lie algebra of T_1, and let $\mathfrak{h}_1^{\mathbb{C}}$ be its complexification. Thus,

$$\mathfrak{h}_1^{\mathbb{C}} = \big\{ H = \mathrm{diag}\,(h_1, ..., h_{n+m-1}, -\textstyle\sum_{j=1}^{n+m-1} h_j) \, ; \, h_j \in \mathbb{C} \text{ for all } 1 \leq j \leq n+m-1 \big\}$$

is a Cartan subalgebra of $\mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}}$ and $\mathfrak{k}_1^{\mathbb{C}}$. Note that the analytically integral members of $(\mathfrak{h}_1^{\mathbb{C}})^*$ are of the form $\sum_{p=1}^{n+m-1} a_p e_p$ with $a_p \in \mathbb{Z}$.
We fix in the sequel the following system of positive roots

$$\Delta^+(\mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}} \, , \, \mathfrak{h}_1^{\mathbb{C}}) = \begin{cases} \{2\, e_1\} & \text{if } n = 1, \\ \{e_i - e_j \, ; \, 1 \leq i < j \leq n+m-1\} \cup & \\ \{e_1 + \cdot\cdot + 2\, e_i + \cdot\cdot + e_{n+m-1} \, ; \, 1 \leq i \leq n+m-1\} & \text{if } n \geq 2. \end{cases}$$

Let us set

$$u = \frac{n+m-1}{2\,(n+m)^2} \quad \text{and} \quad v = -\frac{1}{2\,(n+m)^2} \, .$$

For $n \geq 1$, we find that $\langle \, e_i \, , \, e_i \, \rangle = u$ for all $1 \leq i \leq n+m-1$. Moreover, in the case $n \geq 2$, one obtains that $\langle \, e_i \, , \, e_j \, \rangle = v$ for all $1 \leq i < j \leq n+m-1$.

Let $\lambda = \sum_{p=1}^{n+m-1} \lambda_p \, e_p$ be an integral form. Then λ is the highest weight of an irreducible representation of G_1 if and only if it is dominant relative to $\Delta^+(\mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}} \, , \, \mathfrak{h}_1^{\mathbb{C}})$. For $n \geq 2$ and $1 \leq i < j \leq n+m-1$, we have

$$\langle \, \lambda \, , \, e_i - e_j \, \rangle = (u - v)(\lambda_i - \lambda_j).$$

Since $(u-v) > 0$, we see that $\langle \, \lambda \, , \, e_i - e_j \, \rangle \geq 0$ if and only if $\lambda_i \geq \lambda_j$. Note also that

$$\langle \, \lambda \, , \, e_1 + \cdots + 2\, e_{n+m-1} \, \rangle = (-v)(n+m)\lambda_{n+m-1} \quad \text{for } n \geq 1.$$

This implies that $\langle \, \lambda \, , \, e_1 + \cdots + 2\, e_{n+m-1} \, \rangle \geq 0$ if and only if $\lambda_{n+m-1} \geq 0$. Moreover, if $n \geq 2$ and if $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_{n+m-1} \geq 0$, then

$$\langle \, \lambda \, , \, e_1 + \cdot\cdot + 2\, e_i + \cdot\cdot + e_{n+m-1} \, \rangle = (-v)(n+m)\lambda_i \, \geq 0$$

for all $1 \leq i \leq n+m-2$. Thus, for $n \geq 1$, $\lambda = \sum_{p=1}^{n+m-1} \lambda_p e_p$ is dominant if and only if $\lambda_1 \geq .... \geq \lambda_{n+m-1} \geq 0$.

Let us finally consider $K_1 = S(U(n) \times U(m))$. Assume that $n \geq 2$, and let

$$\mu = \begin{cases} \sum_{p=1}^{n} l_p e_p & \text{if } m = 1, \\ \sum_{p=1}^{n} l_p e_p + \sum_{p=1}^{m-1} j_p e_{n+p} & \text{if } m \geq 2, \end{cases}$$

be an integral form. We fix the following system of positive roots $\Delta^+(\mathfrak{k}_1^{\mathbb{C}}\,,\,\mathfrak{h}_1^{\mathbb{C}}) =$

$$\begin{cases} \{e_i - e_j\,;\, 1 \le i < j \le n\} & \text{if } m = 1, \\ \{e_i - e_j\,;\, 1 \le i < j \le n\} \cup \{e_1 + \cdots + e_n + 2\, e_{n+1}\} & \text{if } m = 2, \\ \{e_i - e_j\,; 1 \le i < j \le n\} \cup \{e_i - e_j\,;\, n+1 \le i < j \le n+m-1\} \cup & \\ \{e_1 + \cdots + 2e_i + \cdots + e_{n+m-1}\,;\, n+1 \le i \le n+m-1\} & \text{if } m \ge 3. \end{cases}$$

Then μ is the highest weight of an irreducible representation of K_1 if and only if it is dominant relative to $\Delta^+(\mathfrak{k}_1^{\mathbb{C}}\,,\,\mathfrak{h}_1^{\mathbb{C}})$. For $1 \le i < j \le n$, we have

$$\langle\, \mu\,,\, e_i - e_j\,\rangle = (u - v)(l_i - l_j).$$

This shows that $\langle\, \mu\,,\, e_i - e_j\,\rangle \ge 0$ for $1 \le i < j \le n$ if and only if $l_i \ge l_j$.
For $m \ge 3$ and $1 \le r < s \le m-1$, we have

$$\langle\, \mu\,,\, e_{n+r} - e_{n+s}\,\rangle = (u - v)(j_r - j_s).$$

In this case, we deduce that $\langle\, \mu\,,\, e_{n+r} - e_{n+s}\,\rangle \ge 0$ if and only if $j_r \ge j_s$.
Moreover, for $m \ge 2$, we have

$$\langle\, \mu\,,\, e_1 + \cdots + 2\, e_{n+m-1}\,\rangle = (-v)(n+m)j_{m-1}.$$

Then $\langle\, \mu\,,\, e_1 + \cdots + 2\, e_{n+m-1}\,\rangle \ge 0$ if and only if $j_{m-1} \ge 0$. Finally, if $l_1 \ge .... \ge l_n$ and if $j_1 \ge .... \ge j_{m-1} \ge 0$, then we observe that

$$\langle\, \mu\,,\, e_1 + \cdots + 2\, e_{n+r} + \cdots + e_{n+m-1}\,\rangle = (-v)(n+m)j_r \ge 0$$

for all $1 \le r \le m-1$. Thus, the condition of dominance of μ is that

$$\begin{cases} l_1 \ge l_2 \ge .... \ge l_n & \text{if } m = 1, \\ l_1 \ge l_2 \ge .... \ge l_n \quad \text{and} \quad j_1 \ge ... \ge j_{m-1} \ge 0 & \text{if } m \ge 2. \end{cases}$$

2 Branching from $U(n+m)$ to $U(n) \times U(m)$

2.1 Recapitulation of polynomial representations of $U(k)$

Definition 1 *Let $(\,V\,,\,\langle\ ,\ \rangle\,)$ be a complex finite-dimensional vector space. Let $\tau : U(k) \longrightarrow GL(V)$ be a representation of $U(k)$. We denote also by τ its holomorphic extension to $GL(k\,,\mathbb{C})$. If for every $v, w \in V$, the map*

$$GL(k\,,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C} \quad,\ g \longmapsto \langle\, \tau(g)v\,,\, w\,\rangle$$

is a holomorphic polynomial of the entries g_{ij} of the matrix g, then the representation τ of $U(k)$ is called ***polynomial****.*

Let us remark that

(1) the natural representation of $U(k)$ on $(\mathbb{C}^k)^{\otimes a}$ $(\,a \in \mathbb{N}\,)$ is polynomial;

(2) the integral power $det^{\,a} : U(k) \longrightarrow GL(\mathbb{C})\,,\ g \longmapsto det(g)^{\,a}$ defines a polynomial representation if and only if $a \in \mathbb{N}$;

(3) if W_1 and W_2 are polynomial representations of $U(k)$, then so are the direct sum $W_1 \oplus W_2$ and the tensor product $W_1 \otimes W_2$;

(4) every subrepresentation of a polynomial representation of $U(k)$ is again polynomial;

(5) if W is a polynomial representation of $U(k)$, then so are the symmetric powers $Sym^a(W)$ and the exterior powers $\wedge^a(W)$ ($a \in \mathbb{N}$).

Now we can characterize the irreducible polynomial representations of $U(k)$ by the following proposition.

Proposition 1 *An irreducible representation τ_λ of $U(k)$ with highest weight $\lambda = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j e_j$ is polynomial if and only if $\lambda_k \geq 0$.*

Proof. Let τ_λ be an irreducible representation of $U(k)$ $(k \geq 2)$ with highest weight $\lambda = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j e_j$ (or simply $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_k)$) where $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_k$. We set $a_j = \lambda_j - \lambda_{j+1}$ for all $1 \leq j \leq k-1$, and $a_k = \lambda_k$. Observe that $a_j \geq 0$ for all $1 \leq j \leq k-1$ and that

$$\lambda = (a_1 + \cdots + a_k, a_2 + \cdots + a_k, ..., a_{k-1} + a_k, a_k).$$

Let $\tau_{\lambda'}$ be the irreducible representation of $U(k)$ with highest weight

$$\lambda' = (a_1 + \cdots + a_{k-1}, a_2 + \cdots + a_{k-1}, ..., a_{k-1}, 0).$$

Then $\tau_{\lambda'}$ is realized as a subrepresentation of the tensor product $Sym^{a_1}(\mathbb{C}^k) \otimes Sym^{a_2}(\wedge^2\mathbb{C}^k) \otimes .... \otimes Sym^{a_{k-1}}(\wedge^{k-1}\mathbb{C}^k)$ spanned by the highest weight vector with weight λ', i.e., the vector $v_{\lambda'} = v_1^{a_1} \otimes (v_1 \wedge v_2)^{a_2} \otimes .... \otimes (v_1 \wedge ... \wedge v_{k-1})^{a_{k-1}}$, where $\{v_i\}_{1 \leq i \leq k}$ is the canonical basis of $\mathbb{C}^k$. Thus, $\tau_{\lambda'}$ is a polynomial representation of $U(k)$. Let $D_{a_k} = (det)^{a_k}$. This is a one dimensional irreducible representation which is polynomial if and only if $a_k \geq 0$. Since $\tau_\lambda \cong \tau_{\lambda'} \otimes D_{a_k}$, we deduce that τ_λ is polynomial if $a_k \geq 0$. Obviously, τ_λ is not polynomial for $a_k < 0$. $\square$

2.2 The branching rules in the unitary case

Let $\Lambda = (\Lambda_1, ..., \Lambda_k)$ be an integral form of $U(k)$ with $\Lambda_1 \geq ... \geq \Lambda_k \geq 0$. We define the **depth** d of Λ to be the largest index j such that $\Lambda_j \neq 0$. We associate to Λ a **Young diagram** which consists of d left-justified rows of boxes with Λ_j boxes in the j^{th} row. The integers $(\underbrace{1, ..., 1}_{\Lambda_1}, ..., \underbrace{d, ..., d}_{\Lambda_d})$ are called the **symbols** of Λ. The total number of boxes in the diagram is $\parallel \Lambda \parallel = \sum_{j=1}^{d} \Lambda_j$.

Let τ_λ be an irreducible polynomial representation of $U(n+m)$ ($n \geq m \geq 2$) with highest weight $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_{n+m})$. Let τ_μ (resp. τ_ν) be an irreducible polynomial representation of $U(n)$ (resp. $U(m)$) with highest weight $\mu = (l_1, ..., l_n)$ (resp. $\nu = (j_1, .., j_m)$). Recall that the multiplicity $m_{\tau_\lambda|_{U(n)\times U(m)}}(\tau_\mu \otimes \tau_\nu)$ giving the number of occurrences of $\tau_\mu \otimes \tau_\nu$ in the restriction $\tau_\lambda|_{U(n)\times U(m)}$ is equal to the multiplicity of τ_λ in the tensor product $\tau_{\tilde{\mu}} \otimes \tau_{\tilde{\nu}}$, where $\tau_{\tilde{\mu}}$ (resp. $\tau_{\tilde{\nu}}$) is an

irreducible representation of $U(n+m)$ with highest weight $\tilde{\mu} = (\, l_1, ..., l_n, 0, .., 0\,)$ (resp. $\tilde{\nu} = (\, j_1, ..., j_m, 0, .., 0\,)\,)$ ($[FH]$, $[GW]$). Now, suppose that $\tau_\mu \otimes \tau_\nu$ occurs in the restriction $\tau_\lambda|_{U(n)\times U(m)}$, i.e., $m_{\,\tau_\lambda|_{U(n)\times U(m)}}(\,\tau_\mu \otimes \tau_\nu\,) \neq 0$. Then we can obtain **new diagrams of** λ, i.e., diagrams corresponding to λ constructed by adding $\|\,\nu\,\|$ boxes to the diagram of μ and by putting a symbol of ν in each additional box.
The Littlewood-Richardson theorem for the unitary group $U(n+m)$ (see, e.g., $[Kn]$) says that the multiplicity $m_{\,\tau_\lambda|_{U(n)\times U(m)}}(\,\tau_\mu \otimes \tau_\nu\,)$ is equal to the number of new diagrams of λ such that

(a) the integers in each row of the new diagram are increasing from left to right,

(b) the integers in each column are strictly increasing from top to bottom,

(c) the integers in the new diagram, when read from right to left and row by row starting form the top row, are such that each initial segment never has more of an integer i than an integer j with $j < i$.

In the next lemmas, we will continue to assume that $m_{\,\tau_\lambda|_{U(n)\times U(m)}}(\,\tau_\mu \otimes \tau_\nu\,) \neq 0$ and we will consider a new diagram of λ which satisfies the conditions (a) , (b), and (c) above. We denote by

(i) $B(i\,,\,j)$ the box in the $i^{\,th}$ row and the $j^{\,th}$ column of the new diagram.

(ii) S the skew diagram corresponding to the boxes added to the Young diagram of μ.

(iii) R_p the p^{th} row of the new diagram for $1 \leq p \leq$ depth (λ).

(iv) $N(\,i\,,\,p\,) = \sharp\{i\,;\; i \in R_p\}$ for $1 \leq i \leq m$, and $1 \leq p \leq$ depth (λ).

In the case when depth $(\lambda) < n+m$, we set $N(\,i\,,\,p\,) = 0$ for all $1 \leq i \leq m$, depth $(\lambda) < p \leq n+m$.

Lemma 1 *We have $N(\,i\,,\,p\,) = 0$ in the following cases:*
(1) *for all $1 \leq i \leq m-1$, $n+i+1 \leq p \leq n+m$.*
(2) *for all $2 \leq i \leq m$, $1 \leq p \leq i-1$.*

Proof. To prove (1), we will argue by contradiction. Assume that there exists $1 \leq i_0 \leq m-1$ such that depth $(\lambda) \geq n+i_0+1$, and $n+i_0+1 \leq p_0 \leq$depth (λ) with $N(\,i_0\,,\,p_0\,) \geq 1$. Then we can find a box $B(p_0\,,\,k_0) \in S$ such that $B(p_0\,,\,k_0) = \boxed{i_0}$. By the condition (b), we obtain that $B(p_0 - i_0 + 1\,,\,k_0) = \boxed{1}$, which is in contradiction with the fact that $B(p_0 - i_0\,,\,k_0) \in S$.
Now, to prove (2), we will proceed by induction on i. From the conditions (a) and (c), one deduces that $2 \notin R_1$. Hence, the case $i = 2$ follows. Suppose that $m \geq 3$ and fix i with $2 \leq i \leq m-1$ such that $N(\,i\,,\,p\,) = 0$ for all $1 \leq p \leq i-1$. If there exists $1 \leq p_0 \leq i$ such that $N(\,i+1\,,\,p_0\,) \geq 1$, then $\sum_{p=1}^{i} N(\,i+1\,,\,p\,)$ is ≥ 1. However, the inductive hypothesis shows that $\sum_{p=1}^{i-1} N(\,i\,,\,p\,) = 0$. Thus, we obtain that $\sum_{p=1}^{i} N(\,i+1\,,\,p\,) > \sum_{p=1}^{i-1} N(\,i\,,\,p\,)$, which contradicts the condition (c). This completes the induction. $\square$

Next, we note the following obvious observation.

Lemma 2 *We have*

$$(1)\quad \lambda_p = \begin{cases} l_p + \sum_{q=1}^{p} N(q\,,\,p) & \textit{if } 1 \le p \le n, \\ \sum_{q=p-n}^{m} N(q\,,\,p) & \textit{if } n+1 \le p \le n+m. \end{cases}$$

$$(2)\quad j_i = \sum_{p=i}^{n+i} N(i\,,\,p) \ \textit{for all } 1 \le i \le m.$$

Let us introduce the following integral parameters:

- $k_j^{(0)} = l_j\,,\ k_j^{(m)} = \lambda_{j+m}$ for all $1 \le j \le n\,;$
- $k_0^{(i)} = \lambda_i\,,\ k_n^{(i)} = N(i\,,\,n+i)$ for all $1 \le i \le m\,;$
- $k_j^{(i)} = k_{j+1}^{(i-1)} + N(i\,,\,i+j)$ for all $1 \le i \le m\,,\, 1 \le j \le n-1.$

Lemma 3 *For all* $1 \le i \le m$*,* $1 \le j \le n$*, we have*

$$k_j^{(i)} = \begin{cases} l_{i+j} + \sum_{p=1}^{i} N(p\,,\,i+j) & \textit{if } i+j \le n, \\ \sum_{p=i+j-n}^{i} N(p\,,\,i+j) & \textit{if } i+j > n. \end{cases}$$

Proof. For $1 \le i \le m\,,\ 1 \le j \le n$ such that $i+j \le n$, we have

$$\begin{aligned} k_j^{(i)} &= k_{j+1}^{(i-1)} + N(i\,,\,i+j) \\ &= k_{i+j}^{(0)} + N(1\,,\,i+j) + \cdots + N(i\,,\,i+j) \\ &= l_{i+j} + \sum_{p=1}^{i} N(p\,,\,i+j). \end{aligned}$$

For $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ such that $i+j > n$, we have

$$\begin{aligned} k_j^{(i)} &= k_{j+1}^{(i-1)} + N(i\,,\,i+j) \\ &= k_n^{(i+j-n)} + N(i+j-n+1\,,\,i+j) + \cdots + N(i\,,\,i+j) \\ &= \sum_{p=i+j-n}^{i} N(p\,,\,i+j). \end{aligned}$$

This completes the proof. $\square$

Lemma 4 *For all* $1 \le i \le m$*,* $1 \le j \le n$*, we have that*

$$k_{j-1}^{(i)} \ge k_j^{(i-1)} \ge k_j^{(i)}.$$

Proof. Let us first prove that $k_{j-1}^{(i)} \ge k_j^{(i-1)}$ for all $1 \le i \le m\,,\ 1 \le j \le n$. It is enough to show this inequality for $j = 1$. In this case, we have

$$k_{j-1}^{(i)} = k_0^{(i)} = \lambda_i = l_i + \textstyle\sum_{p=1}^{i} N(\,p\,,\,i\,).$$

(i) If $i=1$, we have $k_1^{(i-1)} = k_1^{(0)} = l_1$. Since $\lambda_1 \geq l_1$, it follows that $k_0^{(1)} \geq k_1^{(0)}$.
(ii) If $2 \leq i \leq m$, we have $k_1^{(i-1)} = l_i + \sum_{p=1}^{i-1} N(\,p\,,\,i\,)$. This implies that $k_0^{(i)} \geq k_1^{(i-1)}$.
Thus, the inequality $k_{j-1}^{(i)} \geq k_j^{(i-1)}$ holds for $j=1$ and $i=1,...,m$.
Next, we are going to prove that $k_j^{(i-1)} \geq k_j^{(i)}$ for all $1 \leq i \leq m\,,\, 1 \leq j \leq n$. Assume that there exists $1 \leq i \leq m\,,\, 1 \leq j \leq n$ such that $k_j^{(i-1)} < k_j^{(i)}$, and set $k = k_j^{(i-1)} + 1$. This implies that $B(i+j\,,\,k) = \boxed{s}$ with $s \leq i$. However, $B(i+j-1\,,\,k) \in S$ and $B(i+j-1\,,\,k) = \boxed{r}$ with $r \geq i$, yielding a contradiction with the condition (b). Hence, we conclude that $k_j^{(i-1)} \geq k_j^{(i)}$ for all $1 \leq i \leq m\,,\, 1 \leq j \leq n$, and the lemma is proven. □

Now, we define the following parameters:

- $S_1^{(i)} = N(\,i\,,\,i\,)$ for all $1 \leq i \leq m$,
- $S_j^{(i)} = S_{j-1}^{(i)} + N(\,i\,,\,i+j-1\,)$ for all $1 \leq i \leq m$, $2 \leq j \leq n$.

Lemma 5 *We have*

$$\begin{array}{rrcl} (1) & S_j^{(i)} & = & \displaystyle\sum_{p=i}^{i+j-1} N(\,i\,,\,p\,) \ \textit{for all}\ 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n. \\ (2) & j_i & = & S_n^{(i)} + k_n^{(i)} \ \textit{for all}\ 1 \leq i \leq m. \end{array}$$

Proof. Point (1) can be proved by an easy induction on j. The formula of point (2) follows since $j_i = \sum_{p=i}^{n+i} N(\,i\,,\,p\,)$ for all $1 \leq i \leq m$. □

Lemma 6 *For all* $1 \leq i \leq m-1\,,\, 1 \leq j \leq n\,,$ *we have* $S_j^{(i+1)} \leq S_j^{(i)}$.

Proof. Let us fix i with $1 \leq i \leq m-1$. Applying the condition (c) of the Littlewood-Richardson theorem to the integers i and $i+1$, we can write

$$\textstyle\sum_{p=i+1}^{i+j} N(\,i+1\,,\,p\,) \leq \sum_{p=i}^{i+j-1} N(\,i\,,\,p\,) \ \text{for all}\ 1 \leq j \leq n.$$

This inequality means that $S_j^{(i+1)} \leq S_j^{(i)}$ for all $1 \leq j \leq n$. Then we conclude the lemma. □

Lemma 7 *We have*

$$\begin{array}{rcl} (1)\ S_1^{(i)} & = & \lambda_i - k_1^{(i-1)} \ \textit{for all}\ 1 \leq i \leq m. \\ (2)\ S_j^{(i)} & = & \lambda_i + \displaystyle\sum_{p=1}^{j-1} k_p^{(i)} - \sum_{p=1}^{j} k_p^{(i-1)} \ \textit{for all}\ 1 \leq i \leq m,\ 2 \leq j \leq n. \end{array}$$

Proof. Let us first prove the equality (1). For $i=1$, we have $S_1^{(1)} = N(\,1\,,\,1\,)$.

Since $\lambda_1 = l_1 + N(1\,,\,1)$, we deduce that $S_1^{(1)} = \lambda_1 - l_1$. Hence, $S_1^{(1)} = \lambda_1 - k_1^{(0)}$, and then (1) holds in the case $i = 1$. Next, for $2 \le i \le m$, we have $k_1^{(i-1)} = l_i + \sum_{p=1}^{i-1} N(p\,,\,i)$. Since $\lambda_i = l_i + \sum_{p=1}^{i} N(p\,,\,i)$, we obtain that $\lambda_i - k_1^{(i-1)} = N(i\,,\,i)$. This shows that $S_1^{(i)} = \lambda_i - k_1^{(i-1)}$. Consequently, the equality (1) holds for all $1 \le i \le m$.
Now, to prove the second equality, we shall proceed by induction on j. For $j = 2$ we have $S_1^{(i)} = \lambda_i - k_1^{(i-1)}$ for all $1 \le i \le m$. Observe that $k_1^{(i)} - k_2^{(i-1)} = N(i\,,\,i+1)$. This implies that

$$\begin{aligned} S_2^{(i)} &= S_1^{(i)} + N(i\,,\,i+1) \\ &= \lambda_i + k_1^{(i)} - k_1^{(i-1)} - k_2^{(i-1)}. \end{aligned}$$

Then (2) follows for $j = 2$.
Next, for $n \ge 3$, we fix j with $3 \le j \le n$. Assume that

$$S_{j-1}^{(i)} = \lambda_i + \sum_{p=1}^{j-2} k_p^{(i)} - \sum_{p=1}^{j-1} k_p^{(i-1)}.$$

Since $k_{j-1}^{(i)} - k_j^{(i-1)} = N(i\,,\,i+j-1)$, it follows that

$$\begin{aligned} S_j^{(i)} &= S_{j-1}^{(i)} + N(i\,,\,i+j-1) \\ &= S_{j-1}^{(i)} + k_{j-1}^{(i)} - k_j^{(i-1)} \\ &= \lambda_i + \sum_{p=1}^{j-1} k_p^{(i)} - \sum_{p=1}^{j} k_p^{(i-1)}. \end{aligned}$$

Thus, the equality (2) holds for all j, $2 \le j \le n$. □

Definition 2 *Let $\lambda = (\lambda_1, , ..., \lambda_{n+m})$ and $\Lambda = (l_1, ..., l_n)(j_1, ..., j_m)$ be dominant integral forms respectively for $U(n+m)$ and $U(n) \times U(m)$ $(n \ge m \ge 2)$. Let $\mathcal{I} = \{ k_j^{(i)}\,;\, 1 \le i \le m-1\,,\, 1 \le j \le n \}$ be a set of integers. We will say that $\mathcal{I}$ interlaces the pair $(\lambda\,,\,\Lambda)$ if*

(A) : $k_{j-1}^{(i)} \ge k_j^{(i-1)} \ge k_j^{(i)}$ *for all* $1 \le i \le m\,,\, 1 \le j \le n\,;$

(B) : $j_i = S_n^{(i)} + k_n^{(i)}$ *for all* $1 \le i \le m\,;$

(C) : $S_j^{(i+1)} \le S_j^{(i)}$ *for all* $1 \le i \le m-1,\, 1 \le j \le n\,,$

where, by definition,

- $k_j^{(0)} = l_j,\ k_j^{(m)} = \lambda_{j+m}$ *for all* $1 \le j \le n$.

- $k_0^{(i)} = \lambda_i$, $S_1^{(i)} = \lambda_i - k_1^{(i-1)}$ *for all* $1 \leq i \leq m$.
- $S_j^{(i)} = \lambda_i + \sum_{p=1}^{j-1} k_p^{(i)} - \sum_{p=1}^{j} k_p^{(i-1)}$ *for all* $1 \leq i \leq m\,,\, 2 \leq j \leq n$.

Remark. Let τ_λ be an irreducible polynomial representation of $U(n+m)$ $(n \geq m \geq 2)$ with highest weight $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_{n+m})$. Let τ_μ (resp. τ_ν) be an irreducible polynomial representation of $U(n)$ (resp. $U(m)$) with highest weight $\mu = (l_1, ..., l_n)$ (resp. $\nu = (j_1, .., j_m)$). Assuming that we can construct a new diagram of λ subject to the conditions (a), (b), and (c) of the Littlewood-Richardson theorem, we have proved that there exists a set of integers $\mathcal{I} = \{\, k_j^{(i)}\ ;\ 1 \leq i \leq m-1\,,\, 1 \leq j \leq n \,\}$ which interlaces the pair $(\lambda\,,\,\Lambda)$ where $\Lambda = (\,l_1, ..., l_n\,)(\,j_1, ..., j_m\,)$.

Conversely, we have the following proposition.

Proposition 2 *Let τ_λ be an irreducible polynomial representation of $U(n+m)$ $(n \geq m \geq 2)$ with highest weight $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_{n+m})$. Let τ_μ (resp. τ_ν) be an irreducible polynomial representation of $U(n)$ (resp. $U(m)$) with highest weight $\mu = (l_1, ..., l_n)$ (resp. $\nu = (j_1, .., j_m)$), and let $\Lambda = (\,l_1, ..., l_n\,)(\,j_1, ..., j_m\,)$. If there exists a set of integers $\mathcal{I} = \{\, k_j^{(i)}\ ;\ 1 \leq i \leq m-1\,,\, 1 \leq j \leq n \,\}$ which interlaces the pair $(\lambda\,,\,\Lambda)$, then there is a unique new diagram of λ satisfying the conditions (a), (b) and (c) given above.*

Proof. Under the notations and assumptions of this proposition and for all $1 \leq i \leq m\,,\, 1 \leq p \leq n+m$, we define

$$N(\,i\,,\,p\,) := \begin{cases} k_{p-i}^{(i)} - k_{p-i+1}^{(i-1)} & \text{if } \ i \leq p \leq n+i-1, \\ k_n^{(i)} & \text{if } \ p = n+i, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

This implies that $k_j^{(i)} = k_{j+1}^{(i-1)} + N(\,i\,,\,i+j\,)$ for all $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n-1$. Using the facts that $k_j^{(0)} = l_j$ for all $1 \leq j \leq n$ and that $k_n^{(i)} = N(\,i\,,\,n+i\,)$ for all $1 \leq i \leq m$, we immediately deduce (see the proof of Lemma 3) that

$$k_j^{(i)} \quad = \quad \begin{cases} l_{i+j} + \sum_{p=1}^{i} N(\,p\,,\,i+j\,) & \text{if } \ i+j \leq n, \\ \sum_{p=i+j-n}^{i} N(\,p\,,\,i+j\,) & \text{if } \ i+j \ > \ n. \end{cases}$$

Observe that $\sum_{q=1}^{p} N(\,q\,,\,p\,) = k_0^{(p)} - k_p^{(0)}$ for all $1 \leq p \leq m$. This proves that $\lambda_p = l_p + \sum_{q=1}^{p} N(\,q\,,\,p\,)$ for all $1 \leq p \leq n$. Observe also that $\sum_{q=p-n}^{m} N(\,q\,,\,p\,) = k_{p-m}^{(m)}$ for all $n+1 \leq p \leq n+m$. Then $\lambda_p = \sum_{q=p-n}^{m} N(\,q\,,\,p\,)$ for all $n+1 \leq p \leq n+m$. By an easy computation, we find that $S_j^{(i)} = \sum_{p=i}^{i+j-1} N(\,i\,,\,p\,)$ for all $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Using the interlacing condition (B), we obtain that $j_i = \sum_{p=i}^{n+i} N(\,i\,,\,p\,)$ for all $1 \leq i \leq m$. This equality combined with the fact that

$$\lambda_p \quad = \quad \begin{cases} l_p + \sum_{q=1}^{p} N(\,q\,,\,p\,) & \text{if } \ 1 \leq p \leq n, \\ \sum_{q=p-n}^{m} N(\,q\,,\,p\,) & \text{if } \ n+1 \leq p \leq n+m, \end{cases}$$

show that there exists at least one new diagram of λ such that

$$N(\,i\,,\,p\,) = \sharp\{i\,;\ i \in R_p\}\ \text{ for all } 1 \le i \le m,\ 1 \le p \le \text{depth}\,(\lambda).$$

Let us consider the unique new diagram of λ corresponding to the parameters $N(\,i\,,\,p\,)$ and satisfying the condition (a). We shall prove that this diagram satisfies also the conditions (b) and (c).
To prove that the condition (b) is valid, we argue by contradiction. Suppose that there exists a box $B(p\,,\,k) \in S$ such that $B(p\,,\,k) = \boxed{r}$ and $B(p{+}1\,,\,k) = \boxed{s} \in S$ with $1 \le s \le r \le m$. This implies that $k^{(r-1)}_{p-r+1} < k^{(r)}_{p-r+1}$, which contradicts the interlacing condition (A).
Next, we shall prove that the condition (c) is valid. We proceed again by contradiction. Assume that there exists integers $r\,,\,s\,,\,i$ with $1 \le s < r \le m$ and $r \le i \le n{+}r$ such that $\sum_{p=r}^{i} N(\,r\,,\,p\,) > \sum_{p=s}^{i-1} N(\,s\,,\,p\,)$. Since $i-1 \ge i-r+s$, we obtain that

$$(\star) \quad \textstyle\sum_{p=r}^{i} N(\,r\,,\,p\,) > \sum_{p=s}^{i-r+s} N(\,s\,,\,p\,)$$

If $i = n+r$, then this inequality says that $j_r > j_s$, which is impossible since $r > s$. Thus, we can assume that $r \le i \le n+r-1$. In this case, inequality $(\star)$ says that $S^{(r)}_{i-r+1} > S^{(s)}_{i-r+1}$, yielding a contradiction with the interlacing condition (C). This completes the proof of the proposition. $\square$

Consequently, we obtain the fundamental result of this section.

Theorem 1 (***Mickelsson***) *Let τ_λ be an irreducible polynomial representation of $U(n+m)$ $(n \ge m \ge 2)$ with highest weight $\lambda = (\,\lambda_1, ..., \lambda_{n+m}\,)$. Let τ_μ be an irreducible polynomial representation of $U(n) \times U(m)$ with highest weight $\mu = (\,l_1, ..., l_n\,)(\,j_1, .., j_m\,)$. Then the multiplicity $m_{\,\tau_\lambda|_{U(n)\times U(m)}}(\,\tau_\mu\,)$ is equal to the number of sets $\mathcal{I} = \{\,k^{(i)}_j\ ; k^{(i)}_j \in \mathbb{Z}$ for $1 \le i \le m-1\,,\,1 \le j \le n\,\}$ which interlace the pair $(\,\lambda\,,\,\mu\,)$.*

Remark. In the original work of J. Mickelsson ($[Mic1]$, compare also $[Mic2]$), this result is already stated for $n \ge m \ge 2$. A proof was nevertheless given only in the case $n = m = 2$.

Now, we shall generalize this theorem to the case of arbitrary (i.e., not necessarily polynomial) irreducible representations. Let τ_λ be an irreducible representation of $U(n+m)$ with highest weight $\lambda = (\,\lambda_1, ..., \lambda_{n+m}\,)$. Let $a \in \mathbb{N}$ such that $\lambda_{n+m} + a \ge 0$. We set $\tilde\lambda_j := \lambda_j + a$, for all $1 \le j \le n+m$. Thus we have $\tau_{\tilde\lambda} \cong \tau_\lambda \otimes D_a$, where $\tilde\lambda = (\,\tilde\lambda_1, ..., \tilde\lambda_{n+m}\,)$ and $D_a := (det)^{\,a}$. Let us denote $\tau_a = D_{a|_{U(n)\times U(m)}}$. Then, τ_a is an irreducible polynomial representation with highest weight $\nu = (a, ..., a)(a, ..., a)$, and we can write

$$\begin{aligned}
\tau_{\lambda|_{U(n)\times U(m)}} &\cong \tau_{\tilde\lambda|_{U(n)\times U(m)}} \otimes \tau_{-a} \\
&\cong \bigoplus_{\tilde\mu} m_{\,\tau_{\tilde\lambda|_{U(n)\times U(m)}}}(\,\tau_{\tilde\mu}\,)\ \tau_{\tilde\mu} \otimes \tau_{-a}.
\end{aligned}$$

Setting $\tau_\mu = \tau_{\tilde\mu} \otimes \tau_{-a}$, we can see that $m_{\,\tau_{\lambda|_{U(n)\times U(m)}}}(\,\tau_\mu\,) = m_{\,\tau_{\tilde\lambda|_{U(n)\times U(m)}}}(\,\tau_{\tilde\mu}\,)$. Assume now that $m_{\,\tau_{\tilde\lambda|_{U(n)\times U(m)}}}(\,\tau_{\tilde\mu}\,) \ne 0$. The above theorem shows that there exists a set of integers $\tilde{\mathcal{I}} = \{\tilde k^{(i)}_j\,;\,1 \le i \le m-1\,,\,1 \le j \le n\}$ such that $\tilde{\mathcal{I}}$ interlaces the pair $(\,\tilde\lambda\,,\,\tilde\mu\,)$ where $\tilde\mu = (\tilde l_1, ..., \tilde l_n)(\tilde j_1, ..., \tilde j_m)$. We define

- $k_j^{(i)} = \tilde{k}_j^{(i)} - a$ for all $1 \leq i \leq m-1\,,\, 1 \leq j \leq n$.

- $\mathcal{I} = \{k_j^{(i)}\,;\, 1 \leq i \leq m-1\,,\, 1 \leq j \leq n\}$.

- $l_j = \tilde{l}_j - a$ for all $1 \leq j \leq n$, and $j_i = \tilde{j}_i - a$ for all $1 \leq i \leq m$.

Observe that $\mu = (\, l_1, ..., l_n\,)(\, j_1, ..., j_m\,)$ and that $\mathcal{I}$ interlaces the pair $(\,\lambda\,,\,\mu\,)$. Consequently, we obtain

Corollary 1 *Let τ_λ be an irreducible representation of $U(n+m)$ $(n \geq m \geq 2)$ with highest weight $\lambda = (\,\lambda_1, ..., \lambda_{n+m}\,)$. Let τ_μ be an irreducible representation of $U(n) \times U(m)$ with highest weight $\mu = (\, l_1, ..., l_n\,)(\, j_1, .., j_m\,)$. Then the multiplicity $m_{\,\tau_\lambda|_{U(n)\times U(m)}}(\,\tau_\mu\,)$ is equal to the number of sets $\mathcal{I} = \{\, k_j^{(i)}\,;\, k_j^{(i)} \in \mathbb{Z}$ for $1 \leq i \leq m-1\,,\, 1 \leq j \leq n\,\}$ which interlace the pair $(\,\lambda\,,\,\mu\,)$.*

2.3 Applications to "constant" highest weights of $U(n) \times U(m)$

In this subsection, we will analyse some particular cases of the branching from $U(n+m)$ to $U(n) \times U(m)$. More precisely, we shall concentrate on the case of "constant" highest weights of $U(n) \times U(m)$ (i.e., highest weights of the form $(a, ..., a)(b, ..., b)$ with $a,\, b \in \mathbb{Z}$).

Proposition 3 *Let τ_λ be an irreducible representation of $U(n+m)$ $(n \geq m \geq 2)$ with highest weight $\lambda = (\,\lambda_1, ..., \lambda_{n+m}\,)$. Let τ_μ be an irreducible representation of $U(n) \times U(m)$ with highest weight $\mu = (\, a, ..., a\,)(\, 0, .., 0\,)\,(\, a \in \mathbb{Z}\,)$. Let $\mathcal{I} = \{\, k_j^{(i)}\,;\, 1 \leq i \leq m-1\,,\, 1 \leq j \leq n\,\}$ be a set of integers. The following assertions are equivalent :*
(1) *$\mathcal{I}$ interlaces the pair $(\,\lambda\,,\,\mu\,)$.*
(2) *For all $1 \leq i \leq m-1$,*

$$
\begin{aligned}
k_j^{(i)} \quad &= \quad \begin{cases} a & \text{if } 1 \leq j \leq n-i, \\ a - \lambda_{n-j+1} & \text{if } n-i+1 \leq j \leq n, \end{cases} \\
\text{and } \lambda \quad &= \quad \begin{cases} (\,\lambda_1\,, .., \,\lambda_m\,, a\,, ..., \,a\,,\, a-\lambda_m\,, ..., \,a-\lambda_1\,) & \text{if } n \geq m+1, \\ (\,\lambda_1\,, ..., \,\lambda_m\,,\, a-\lambda_m\,, ..., \,a-\lambda_1\,) & \text{if } n = m, \end{cases}
\end{aligned}
$$

with $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq .... \geq \lambda_m \geq Sup\,\{0\,,\, a\}$.

We prepare the proof by the following lemma.

Lemma 8 *Let τ_λ , τ_μ, and $\mathcal{I}$ be as in the assumptions of the above proposition. Assume that $\mathcal{I}$ interlaces the pair $(\,\lambda\,,\,\mu\,)$. Then we have the equality*

$$\sum_{p=1}^{i} \lambda_p + \sum_{p=n-i+1}^{n} k_p^{(i)} = i\,a \quad \text{for all } 1 \leq i \leq m.$$

Proof. We proceed by induction on i. First, since $\mathcal{I}$ interlaces the pair $(\lambda\,,\,\mu\,)$, we observe that $k_j^{(i)} = a$ for all $1 \leq i \leq m-1\,, 1 \leq j \leq n-i$. Moreover, μ is of the form $\mu = (\,l_1, ..., l_n\,)(\,j_1, .., j_m\,)$ with $l_1 = ... = l_n = a$ and $j_1 = .. = j_m = 0$. Hence, the condition $j_1 = S_n^{(1)} + k_n^{(1)}$ implies that $\lambda_1 + k_n^{(1)} = a$. This proves the case $i = 1$. Let us fix i with $1 \leq i \leq m-1$, and suppose that

$$\sum_{p=1}^{i} \lambda_p + \sum_{p=n-i+1}^{n} k_p^{(i)} = i\,a.$$

Using the equality

$$\begin{aligned} j_{i+1} &= S_n^{(i+1)} + k_n^{(i+1)} \\ &= \lambda_{i+1} + \sum_{p=1}^{n} k_p^{(i+1)} - \sum_{p=1}^{n} k_p^{(i)}, \end{aligned}$$

and the inductive hypothesis, we can see that

$$\sum_{p=1}^{i+1} \lambda_p + \sum_{p=n-i}^{n} k_p^{(i+1)} = (i+1)\,a.$$

This proves the formula of the lemma for $i+1$ and completes the induction. $\square$

Proof of Proposition 3. First, we suppose that $n \geq m+1$.

In order to prove the direct part of the proposition in this case, we will proceed by serval steps. Let τ_λ , τ_μ, and $\mathcal{I}$ be as above. Assume that $\mathcal{I}$ interlaces the pair $(\,\lambda\,,\,\mu\,)$. This forces $k_j^{(i)} = a$ for all $1 \leq i \leq m\,,\, 1 \leq j \leq n-i$.
We claim that, for all $1 \leq i \leq m$, the assertion

$$(\star)_i \;\;:\; \lambda_{n-j+1} + k_j^{(i)} = a \;\; \text{for all } n-i+1 \leq j \leq n,$$

is valid. In fact, we can prove this by induction on i. For $i = 1$, the assertion $(\star)_i$ is a special case of the statement of Lemma 8. Let us fix i with $1 \leq i \leq m-1$. Assume $(\star)_r$ for all $1 \leq r \leq i$. We shall prove that $(\star)_{i+1}$ is valid, i.e., that $\lambda_{n-j+1} + k_j^{(i+1)} = a$ for all $n-i \leq j \leq n$. We do so by induction on j.
(1) For $j = n$, we have

$$\begin{aligned} S_n^{(i+1)} &= \lambda_{i+1} + \sum_{p=1}^{n-1} k_p^{(i+1)} - \sum_{p=1}^{n} k_p^{(i)} \\ &= \lambda_{i+1} - a + \sum_{p=n-i}^{n-1} k_p^{(i+1)} - \sum_{p=n-i+1}^{n} k_p^{(i)}. \end{aligned}$$

Using the formula of the last lemma, we obtain that $S_n^{(i+1)} = -k_n^{(i+1)}$. Similarly, if $m \geq 3$ and $2 \leq i \leq m-1$, then we have

$$\begin{aligned} S_n^{(i)} &= \lambda_i + \sum_{p=1}^{n-1} k_p^{(i)} - \sum_{p=1}^{n} k_p^{(i-1)} \\ &= \lambda_i - a + \sum_{p=n-i+1}^{n-1} k_p^{(i)} - \sum_{p=n-i+2}^{n} k_p^{(i-1)} \\ &= -k_n^{(i)}. \end{aligned}$$

In this case, the inductive hypothesis shows that $\lambda_1 + k_n^{(i)} = a$, and hence we obtain that $S_n^{(i)} = \lambda_1 - a$. Moreover, one easly find that $S_n^{(1)} = \lambda_1 - a$. Thus, we conclude that $S_n^{(i)} = \lambda_1 - a$ for all $1 \leq i \leq m-1$. By the interlacing property, we have $S_n^{(i+1)} \leq S_n^{(i)}$ for all $1 \leq i \leq m-1$, and then $\lambda_1 + k_n^{(i+1)} \geq a$ for all $1 \leq i \leq m-1$. However, for $i = 1, .., m-1$, we have the inequality $k_n^{(i)} \geq k_n^{(i+1)}$. Since $\lambda_1 + k_n^{(i)} = a$, we deduce that $a \geq \lambda_1 + k_n^{(i+1)}$. Thus, we have proved that $\lambda_1 + k_n^{(i+1)} = a$.

(2) Let us fix j with $n-i \leq j \leq n-1$. Suppose that $\lambda_{n-p+1} + k_p^{(i+1)} = a$ for all $j+1 \leq p \leq n$. We will prove that $\lambda_{n-j+1} + k_j^{(i+1)} = a$. For this we consider the following cases:

Case 1. For $j = n-i$, by Lemma 8 we have the equality

$$(i+1)\, a = \sum_{p=1}^{i+1} \lambda_p + \sum_{p=n-i}^{n} k_p^{(i+1)} = \sum_{p=n-i}^{n} (\, \lambda_{n-p+1} + k_p^{(i+1)}\,).$$

This implies that $\lambda_{i+1} + k_{n-i}^{(i+1)} = a$, i.e., the formula $\lambda_{n-j+1} + k_j^{(i+1)} = a$ is valid in the case $j = n-i$.

Case 2. Assume $m \geq 3$ and $2 \leq i \leq m-1$. For $j = n-i+1, ..., n-1$, we can observe that $S_j^{(i+1)} = -k_j^{(i)}$. In fact, using the inductive hypothesis, we compute that

$$\begin{aligned}
S_j^{(i+1)} &= \lambda_{i+1} + \sum_{p=1}^{j-1} k_p^{(i+1)} - \sum_{p=1}^{j} k_p^{(i)} \\
&= \lambda_{i+1} - a + \sum_{p=n-i}^{j-1} k_p^{(i+1)} - \sum_{p=n-i+1}^{j} k_p^{(i)} \\
&= \sum_{p=n-j+1}^{i+1} \lambda_p + \sum_{p=n-i}^{j-1} k_p^{(i+1)} - (i+j-n+1)\, a \\
&= -k_j^{(i+1)}.
\end{aligned}$$

Now, assume $m \geq 4$ and $3 \leq i \leq m-1$. For $j = n-i+2, .., n-1$, one can see that $S_j^{(i)} = \lambda_{n-j+1} - a$. In fact, we have

$$\begin{aligned}
S_j^{(i)} &= \lambda_i + \sum_{p=1}^{j-1} k_p^{(i)} - \sum_{p=1}^{j} k_p^{(i-1)} \\
&= \lambda_i - a + \sum_{p=n-i+1}^{j-1} k_p^{(i)} - \sum_{p=n-i+2}^{j} k_p^{(i-1)}.
\end{aligned}$$

Then the inductive hypothesis implies that $S_j^{(i)} = \lambda_{n-j+1} - a$. Moreover, a simple computation gives that $S_j^{(i)} = \lambda_i - a$ for $j = n-i+1$. This shows that $S_j^{(i)} = \lambda_{n-j+1} - a$ for all $n-i+1 \leq j \leq n-1$. Next, we fix j with $n-i+1 \leq j \leq n-1$. Since $S_j^{(i+1)} \leq S_j^{(i)}$ for all $1 \leq i \leq m-1$, we obtain the inequality $\lambda_{n-j+1} + k_j^{(i+1)} \geq a$ for all $1 \leq i \leq m-1$. For $i = 1, .., m-1$, the

inequality $k_j^{(i)} \geq k_j^{(i+1)}$ combined with the equality $\lambda_{n-j+1} + k_j^{(i)} = a$ implies that $a \geq \lambda_{n-j+1} + k_j^{(i+1)}$. Hence, we conclude that $\lambda_{n-j+1} + k_j^{(i+1)} = a$ and this completes the induction.
Using the fact that $k_j^{(r)} = a$ for all $1 \leq r \leq m\,,\, 1 \leq j \leq n-r$, we can easily see that $S_j^{(i+1)} = \lambda_{i+1} - a$ and $S_j^{(i)} = \lambda_i - a$ for all $1 \leq i \leq m-1\,,\, 1 \leq j \leq n-i$. In particular, for $1 \leq i \leq m-1\,,\, 1 \leq j \leq n-i$, the inequality $S_j^{(i+1)} \leq S_j^{(i)}$ says that $\lambda_{i+1} \leq \lambda_i$. Finally, the interlacing condition (A) implies that $\lambda_m \geq a$ and $a \geq \lambda_{n+1}$. But we have also that $\lambda_m + \lambda_{n+1} = \lambda_m + k_{n-m+1}^{(m)} = a$, then it follows that $\lambda_m \geq Sup\,\{0\,,\,a\}$. This completes the proof of the direct part.

To prove the reverse part, we will put, as above, $k_j^{(m)} = \lambda_{j+m}$ for all $1 \leq j \leq n$ and can thus assume that λ and $\mathcal{I}$ satisfy the following conditions:

$$k_j^{(i)} = \begin{cases} a & \text{if } 1 \leq i \leq m \text{ and } 1 \leq j \leq n-i, \\ a - \lambda_{n-j+1} & \text{if } 1 \leq i \leq m \text{ and } n-i+1 \leq j \leq n, \end{cases}$$

with $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq .... \geq \lambda_m \geq Sup\,\{0\,,\,a\}$.
The conditions (B) and (C) required in the definition of the interlacing property are obviously satisfied. We thus only have to check that the inequalities $k_j^{(i)} \geq k_{j+1}^{(i-1)} \geq k_{j+1}^{(i)}$ hold for all $1 \leq i \leq m\,,\, n-i \leq j \leq n-1$. Note that $\lambda_1 + k_n^{(1)} = a$. Since $\lambda_1 \geq 0$, we have that $k_n^{(1)} \leq a$, and hence the case $i = 1$ follows. Next, we fix i with $2 \leq i \leq m$. Observe that $\lambda_{n-j} + k_{j+1}^{(i-1)} = \lambda_{n-j} + k_{j+1}^{(i)} = a$ for all $n-i+1 \leq j \leq n-1$. This implies that $k_{j+1}^{(i-1)} = k_{j+1}^{(i)}$ for all $n-i+1 \leq j \leq n-1$. If $j = n-i$, then we have the equality $\lambda_{n-j} + k_{j+1}^{(i)} = a$. Because $\lambda_i \geq 0$, we deduce that $k_{n-i+1}^{(i)} \leq a$. On the other hand, we have $k_{n-i+1}^{(i-1)} = a$. So, $k_{j+1}^{(i-1)} \geq k_{j+1}^{(i)}$ for $j = n-i$, and then $k_{j+1}^{(i-1)} \geq k_{j+1}^{(i)}$ for all $n-i \leq j \leq n-1$. Note that $\lambda_{n-j+1} + k_j^{(i)} = \lambda_{n-j} + k_{j+1}^{(i-1)} = a$ for all $n-i+1 \leq j \leq n-1$. Since $\lambda_{n-j} \geq \lambda_{n-j+1}$, we obtain that $k_j^{(i)} \geq k_{j+1}^{(i-1)}$ for all $n-i+1 \leq j \leq n-1$. Moreover, for $j = n-i$, we have $k_j^{(i)} = k_{j+1}^{(i-1)} = a$. Thus, we can write the inequality $k_j^{(i)} \geq k_{j+1}^{(i-1)}$ for all $n-i \leq j \leq n-1$. This completes the proof of the reverse part.

The case $n = m$ follows by a completely analogous reasoning. $\square$

Remark. In view of the theorem of Mickelsson, the last proposition shows that the multiplicity $m_{\,\tau_\lambda|_{U(n)\times U(m)}}(\,\tau_\mu\,)$ is either 0 or 1.

Proposition 4 *Let τ_λ be an irreducible representation of $U(n+m)$ $(n \geq m \geq 1)$ with highest weight $\lambda = (\,\lambda_1, ..., \lambda_{n+m}\,)$. Let τ_μ be an irreducible representation of $U(n) \times U(m)$ with highest weight $\mu = (\,a, ..., a\,)(\,0, .., 0\,)\,(\,a \in \mathbb{Z}\,)$. Then the multiplicity $m_{\,\tau_\lambda|_{U(n)\times U(m)}}(\,\tau_\mu\,)$ is either 0 or 1, and $m_{\tau_\lambda|_{U(n)\times U(m)}}(\tau_\mu) = 1$ if and only if λ is of the form*

$$\lambda = \begin{cases} (\,\lambda_1\,, .., \lambda_m\,, a\,, ..., a\,,\, a-\lambda_m\,, ..., a-\lambda_1\,) & \textit{if } n \geq m+1, \\ (\,\lambda_1\,, ..., \lambda_m\,,\, a-\lambda_m\,, ..., a-\lambda_1\,) & \textit{if } n = m, \end{cases}$$

with $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq .... \geq \lambda_m \geq Sup\{0\,,\,a\}$.

Proof. Taking into account the last proposition, we have only to prove the case $m = 1$. In this case, we write $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n)(\mu_{n+1})$ with $\mu_1 = \cdots = \mu_n = a$, and $\mu_{n+1} = 0$. It is well known (see, e.g., $[Kn]$) that the branching from $U(n+1)$ to $U(n) \times U(1)$ is multiplicity free and that $m_{\tau_\lambda|_{U(n)\times U(1)}}(\,\tau_\mu\,) = 1$ if and only if the following conditions hold

$$\begin{cases} \lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq ... \geq \lambda_n \geq \mu_n \geq \lambda_{n+1}\,, \\ \mu_{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j - \sum_{j=1}^{n} \mu_j\,. \end{cases}$$

Consequently, $m_{\tau_\lambda|_{U(n)\times U(1)}}(\,\tau_\mu\,) = 1$ if and only only if λ is of the form

$$\lambda = \begin{cases} (\,\lambda_1\,,\,a\,, ...,\,a\,,\,a-\lambda_1\,) & \text{if } n \geq 2, \\ (\,\lambda_1\,,\,a-\lambda_1\,) & \text{if } n = 1, \end{cases}$$

with $\lambda_1 \geq Sup\{0\,,\,a\}$. This shows the case $m = 1$ and completes the proof of the proposition. □

Corollary 2 *Let τ_λ be an irreducible representation of $U(n+m)$ $(n \geq m \geq 1)$ with highest weight $\lambda = (\,\lambda_1, ..., \lambda_{n+m-1}, 0\,)$. Let τ_μ be an irreducible representation of $U(n) \times U(m)$ with highest weight $\mu = (\,a + b_1, ..., a + b_1\,)(\,b_1, .., b_1\,)$, where $a\,,\,b_1 \in \mathbb{Z}$. Then the multiplicity $m_{\tau_\lambda|_{U(n)\times U(m)}}(\,\tau_\mu\,)$ is either 0 or 1 and $m_{\tau_\lambda|_{U(n)\times U(m)}}(\tau_\mu) = 1$ if and only if*

(1) *for $m = 1$, λ is of the form*

$$\lambda = \begin{cases} (\,a + 2\,b_1\,,\,a + b_1\,, ...,\,a + b_1\,, 0\,) & \textit{if } n \geq 2, \\ (\,a + 2\,b_1\,, 0\,) & \textit{if } n = 1, \end{cases}$$

with $b_1 \geq Sup\{0\,,\,-a\}$;

(2) *for $m \geq 2$, λ is of the form*

$$\lambda = \begin{cases} (\,a + 2\,b_1\,,\,a + b_1 + b_2\,, ..,\,a + b_1 + b_m\,,\,a + b_1\,, ...,\,a + b_1\,,\,b_1 - b_m\,, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ....,\,b_1 - b_2\,, 0\,) \;\; \textit{if } n \geq m+1, \\ (\,a + 2\,b_1\,,\,a + b_1 + b_2\,, ..,\,a + b_1 + b_m\,,\,b_1 - b_m\,, ...,\,b_1 - b_2\,, 0\,) \;\; \textit{if } n = m, \end{cases}$$

with $b_1 \geq b_2 \geq .... \geq b_m \geq Sup\{0\,,\,-a\}$.

Proof. Let τ_λ and τ_μ be as above. Let $D_{b_1} := (det)^{\,b_1}$, and let τ_ν be an irreducible representation of $U(n)\times U(m)$ with highest weight $\nu = (\,a\,, ...,\,a\,)(\,0\,, ...,\,0\,)$. Then $m_{\tau_\lambda|_{U(n)\times U(m)}}(\tau_\mu) \neq 0$ if and only if there exists an irreducible representation $\tau_{\lambda'}$ of $U(n+m)$ such that $\tau_\lambda \cong \tau_{\lambda'} \otimes D_{b_1}$ and $m_{\tau_{\lambda'}|_{U(n)\times U(m)}}(\tau_\nu) \neq 0$. In this situation, we have that $m_{\tau_\lambda|_{U(n)\times U(m)}}(\tau_\mu) = m_{\tau_{\lambda'}|_{U(n)\times U(m)}}(\tau_\nu)$. Applying the last proposition to $\tau_{\lambda'}$ and τ_ν, we deduce that $m_{\tau_{\lambda'}|_{U(n)\times U(m)}}(\tau_\nu) = 1$, and $\lambda^{'}$ is of the form

$$\lambda^{'} = \begin{cases} (\,\lambda_1^{'}\,, ..,\,\lambda_m^{'}\,, a\,, ...,\,a\,,\,a - \lambda_m^{'}\,, ...,\,a - \lambda_1^{'}\,) & \text{if } n \geq m+1, \\ (\,\lambda_1^{'}\,, ...,\,\lambda_m^{'}\,,\,a - \lambda_m^{'}\,, ...,\,a - \lambda_1^{'}\,) & \text{if } n = m, \end{cases}$$

with $\lambda_1^{'} \geq \lambda_2^{'} \geq .... \geq \lambda_m^{'} \geq Sup\{0\,,\,a\}$.
Now, the condition $\tau_\lambda \cong \tau_{\lambda^{'}} \otimes D_{b_1}$ forces λ to be of the form

$$\lambda = \begin{cases} (\,\lambda_1^{'} + b_1\,,..,\,\lambda_m^{'} + b_1\,, a + b_1\,,...,\,a + b_1\,,\,a + b_1 - \lambda_m^{'}\,, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ....,\,a + b_1 - \lambda_1^{'}\,) & \text{if } n \geq m+1, \\ (\,\lambda_1^{'} + b_1\,,...,\,\lambda_m^{'} + b_1\,,\,a + b_1 - \lambda_m^{'}\,,...,\,a + b_1 - \lambda_1^{'}\,) & \text{if } n = m. \end{cases}$$

As we must have $\lambda_{n+m} = 0$, we obtain that $\lambda_1^{'} = a + b_1$. For $m \geq 2$, we set $b_j = \lambda_j^{'} - a$ for all $2 \leq j \leq m$. Then we see that λ is of the required form. □

3 Branching from $SU(n+m)$ to $S(U(n) \times U(m))$

In this section, we shall derive the branching from $SU(n+m)$ to $S(U(n)\times U(m))$ as a consequence of the branching from $U(n+m)$ to $U(n) \times U(m)$. We first show two preliminary lemmas.

Lemma 9 *Let ρ be an irreducible representation of $U(k)$ $(k \geq 2)$ with highest weight $\lambda = (\,\lambda_1, ..., \lambda_k\,)$. Then the restriction $\rho|_{SU(k)}$ is an irreducible representation with highest weight $\mu = (\,\lambda_1 - \lambda_k, ..., \lambda_{k-1} - \lambda_k\,)$.*

Proof. Let the map $\varphi : SU(k)\times U(1) \longrightarrow U(k)$ be defined by $\varphi((A\,,\,z)) = z\,A$ for $A \in SU(k)$ and $z \in U(1)$. Note that φ is surjective. Then, for ρ as above, $\varphi^*\rho := \rho \circ \varphi$ is an irreducible representation of $SU(k) \times U(1)$, i.e., $\rho \cong \rho_1 \otimes \rho_2$ where ρ_1 and ρ_2 are irreducible representations of $SU(k)$ and $U(1)$, respectively. We deduce that $\rho|_{SU(k)} = \varphi^*\rho|_{SU(k)} \cong \rho_1$. Let now $H = diag\,(\,i\,h_1, ..., i\,h_k\,)$ with $h_j \in \mathbb{R}$ for $j = 1, .., k$, and $h_1 + \cdot\cdot + h_k = 0$. Let $\theta \in \mathbb{R}$. If we denote by φ_* the differential of φ at $(I_k\,,\,1)$, then we have

$$\varphi_*((\,H\,,\,i\,\theta\,)) = diag\,((\,i\,(h_1 + \theta), ..., i\,(h_k + \theta)\,) =: H^{'}.$$

Denote by ψ the dual map of the $\mathbb{C}$-linear extension of φ_*. Observe that

$$\begin{aligned} \psi(\,\lambda\,)(\,H\,,\,\theta\,) &= \lambda(H^{'}) \\ &= i\,\lambda_1(h_1 + \theta) + \cdot\cdot + i\,\lambda_k(h_k + \theta) \\ &= i\,(\,\lambda_1 - \lambda_k\,)h_1 + \cdot\cdot + i\,(\,\lambda_{k-1} - \lambda_k\,)h_{k-1} + i\,\theta\,(\lambda_1 + \cdot\cdot + \lambda_k). \end{aligned}$$

Thus, $\psi(\lambda) = (\mu\,,\,\nu)$ where $\mu = (\,\lambda_1 - \lambda_k, .., \lambda_{k-1} - \lambda_k\,)$ and $\nu = (\,\lambda_1 + \cdot\cdot + \lambda_k\,)$. It follows that $\rho_1 \cong \rho|_{SU(k)}$ is irreducible with highest weight

$$\mu = (\,\lambda_1 - \lambda_k, .., \lambda_{k-1} - \lambda_k\,),$$

and this completes the proof. □

Similarly one proves

Lemma 10 *Let ρ be an irreducible representation of $U(n) \times U(m)$ $(n \geq m \geq 2)$ with highest weight $\nu = (l_1, .., l_n)(j_1, .., j_m)$. Then the restriction $\rho|_{S(U(n)\times U(m))}$ is an irreducible representation with highest weight*

$$\mu = (l_1 - j_m, ..., l_n - j_m)(j_1 - j_m, ..., j_{m-1} - j_m).$$

We can now prove the main result of this section.

Theorem 2 Let τ_λ be an irreducible representation of $SU(n+m)$ $(n \geq m \geq 1)$ with highest weight $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_{n+m-1})$. Let τ_μ be an irreducible representation of $S(U(n) \times U(m))$ with highest weight μ. Then the multiplicity $m_{\tau_\lambda|_{S(U(n)\times U(m))}}(\tau_\mu)$ is non-zero if and only if there exists an irreducible representation τ_ν of $U(n) \times U(m)$ such that

$$\tau_\nu|_{S(U(n)\times U(m))} \cong \tau_\mu \text{ and } m_{\tau_{\tilde{\lambda}}|_{U(n)\times U(m)}}(\tau_\nu) \neq 0,$$

where $\tau_{\tilde{\lambda}}$ is the (class of the) irreducible representation of $U(n+m)$ with highest weight $\tilde{\lambda} = (\lambda_1, .., \lambda_{n+m-1}, 0)$. Moreover, such a representation τ_ν is unique.

Proof. We shall return to the notations $G = U(n+m)$, $K = U(n) \times U(m)$, $G_1 = SU(n+m)$, and $K_1 = S(U(n) \times U(m))$. Let τ_λ, $\tau_{\tilde{\lambda}}$, and τ_μ be as above. Since we have $Res^{K}_{K_1}(Res^{G}_{K}\tau_{\tilde{\lambda}}) = Res^{G}_{K_1}\tau_{\tilde{\lambda}}$, we can write

$$m_{\tau_{\tilde{\lambda}}|_{K_1}}(\tau_\mu) = \sum_{\tau_\nu \in \widehat{K}} m_{\tau_{\tilde{\lambda}}|_K}(\tau_\nu)\, m_{\tau_\nu|_{K_1}}(\tau_\mu).$$

Observe that $Res^{G}_{G_1}\tau_{\tilde{\lambda}} \cong \tau_\lambda$. This shows that $Res^{K}_{K_1}Res^{G}_{K}\tau_{\tilde{\lambda}} \cong Res^{G_1}_{K_1}\tau_\lambda$, and then we have $m_{\tau_{\tilde{\lambda}}|_{K_1}}(\tau_\mu) = m_{\tau_\lambda|_{K_1}}(\tau_\mu)$. We conclude that $m_{\tau_\lambda|_{K_1}}(\tau_\mu) \neq 0$ if and only if there exists $\tau_\nu \in \widehat{K}$ such that $m_{\tau_\nu|_{K_1}}(\tau_\mu) \neq 0$ (in this case, we have here $m_{\tau_\nu|_{K_1}}(\tau_\mu) = 1$, i.e., $\tau_\nu|_{K_1} \cong \tau_\mu$) and $m_{\tau_{\tilde{\lambda}}|_K}(\tau_\nu) \neq 0$. This proves the first statement.

Now, we shall prove the second statement in the case $m \geq 2$. Assume that there exists an irreducible representation $\tau_{\nu'}$ of $U(n) \times U(m)$ satisfying $\tau_{\nu'}|_{K_1} \cong \tau_\mu$ and $m_{\tau_{\tilde{\lambda}}|_K}(\tau_{\nu'}) \neq 0$ with $\nu' \neq \nu$. If $\nu = (l_1, ..., l_n)(j_1, ..., j_m)$, then there exists $a \in \mathbb{Z}^*$ such that $\nu' = (l_1+a, ..., l_n+a)(j_1+a, ..., j_m+a)$. Since $m_{\tau_{\tilde{\lambda}}|_K}(\tau_\nu) \neq 0$, we can find a set of integers $\mathcal{I} = \{ k_j^{(i)} ; 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq n \}$ which interlaces the pair $(\tilde{\lambda}, \nu)$. In particular, we have the interlacing condition $j_i = S_n^{(i)} + k_n^{(i)}$ for all $1 \leq i \leq m$. For $i = 1$, this equality implies that $\sum_{p=1}^{n} k_p^{(1)} = j_1 - \lambda_1 + \sum_{p=1}^{n} l_p$. Recursively, the equality $j_i = S_n^{(i)} + k_n^{(i)}$ will give us the formula

$$\sum_{p=1}^{n} k_p^{(i)} = \sum_{p=1}^{i} j_p - \sum_{p=1}^{i} \lambda_p + \sum_{p=1}^{n} l_p \tag{1}$$

for all $1 \leq i \leq m-1$. In the case $i = m$, the equality $j_i = S_n^{(i)} + k_n^{(i)}$ says that $j_m = \sum_{p=m}^{n+m-1} \lambda_p - \sum_{p=1}^{n} k_p^{(m-1)}$. Using formula (1), we deduce that

$$j_m = \sum_{p=1}^{n+m-1} \lambda_p - \sum_{p=1}^{m-1} j_p - \sum_{p=1}^{n} l_p. \tag{2}$$

Similarly, since we have $m_{\tau_{\tilde{\lambda}}|_K}(\tau_{\nu'}) \neq 0$, there exists a set of inegers $\mathcal{I}' = \{ k'^{(i)}_j ; 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq n \}$ which interlaces the pair $(\tilde{\lambda}, \nu')$. By the same reasoning as above, we obtain that

$$j_m + a = \sum_{p=1}^{n+m-1} \lambda_p - \sum_{p=1}^{m-1} j_p - \sum_{p=1}^{n} l_p - (n+m-1)a. \tag{3}$$

Combining the equalities (2) and (3), we find that $(n+m)a = 0$ which contradicts the hypothesis $a \in \mathbb{Z}^*$. Thus, the second statement is proven for $m \geq 2$.

Similarly, this statement follows in the case $m = 1$ by applying the branching from $U(n+1)$ to $U(n) \times U(1)$ (compare the proof of Proposition 4). $\square$

Corollary 3 *Let τ_λ be an irreducible representation of $SU(n+m)$ with highest weight $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_{n+m-1})$ $(n \geq m \geq 1)$. Let τ_μ be an irreducible representation of $S(U(n) \times U(m))$ with highest weight $\mu = (a, ..., a)(0, .., 0)$, where $a \in \mathbb{Z}$. Then the multiplicity $m_{\tau_\lambda|_{S(U(n)\times U(m))}}(\tau_\mu)$ is either 0 or 1, and $m_{\tau_\lambda|_{S(U(n)\times U(m))}}(\tau_\mu) = 1$ if and only if*
(1) for $m = 1$, λ is of the form

$$\lambda = \begin{cases} (a + 2b_1, a + b_1, ..., a + b_1) & \text{if } n \geq 2, \\ (a + 2b_1) & \text{if } n = 1, \end{cases}$$

with $b_1 \geq Sup\{0, -a\}$;
(2) for $m \geq 2$, λ is of the form

$$\lambda = \begin{cases} (a + 2b_1, a + b_1 + b_2, .., a + b_1 + b_m, a + b_1, ..., a + b_1, b_1 - b_m, \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad ...., b_1 - b_2) \ \text{if } n \geq m + 1, \\ (a + 2b_1, a + b_1 + b_2, .., a + b_1 + b_m, b_1 - b_m, ..., b_1 - b_2) \ \text{if } n = m, \end{cases}$$

with $b_1 \geq b_2 \geq .... \geq b_m \geq Sup\{0, -a\}$.

Proof. Let τ_λ and τ_μ be as above. Note that $m_{\tau_\lambda|_{S(U(n)\times U(m))}}(\tau_\mu) \neq 0$ if and only if there exists an irreducible representation τ_ν of $U(n) \times U(m)$ such that $\tau_\nu|_{S(U(n)\times U(m))} \cong \tau_\mu$ and $m_{\tau_{\tilde{\lambda}}|_{U(n)\times U(m)}}(\tau_\nu) \neq 0$, where $\tilde{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_{n+m-1}, 0)$. Moreover, we have observed that such a representation τ_ν is necessarily unique. It follows that $m_{\tau_\lambda|_{S(U(n)\times U(m))}}(\tau_\mu) = m_{\tau_{\tilde{\lambda}}|_{U(n)\times U(m)}}(\tau_\nu)$. By the condition $\tau_\nu|_{S(U(n)\times U(m))} \cong \tau_\mu$, the highest weight ν is of the form

$$\nu = (a + b_1, ..., a + b_1)(b_1, .., b_1)$$

with $b_1 \in \mathbb{Z}$. Now Corollary 2 completes the proof. $\square$

4 Branching from $SU(n+m)$ to $SU(n) \times SU(m)$

In this section, we study the branching from $SU(n+m)$ to $SU(n) \times SU(m)$ by using similar techniques as in the last section. We first give the following useful lemma.

Lemma 11 *Let ρ be an irreducible representation of $S(U(n)\times U(m))$ with highest weight $\mu = (l_1, ..., l_n)(j_1, ..., j_{m-1})$ $(n \geq m \geq 2)$. Then the restriction $\rho|_{SU(n)\times SU(m)}$ is an irreducible representation with highest weight*

$$\nu = (l_1 - l_n, ..., l_{n-1} - l_n)(j_1, ..., j_{m-1}).$$

Proof. Define $\varphi : SU(n) \times SU(m) \times U(1) \longrightarrow S(U(n) \times U(m))$ by

$$\varphi((A\,,\,A^{'})\,,\,z) = (z^{m}\,A\,,\,z^{-n}\,A^{'}).$$

Note that φ is surjective. Thus, if ρ is as above, the representation $\varphi^*\rho := \rho\circ\varphi$ of $SU(n)\times SU(m)\times U(1)$ will be irreducible. We can then write $\varphi^*\rho \cong \rho_1\otimes\rho_2$ where ρ_1 and ρ_2 are an irreducible representations of $SU(n)\times SU(m)$ and $U(1)$, respectively. In particular, we have that $\rho_1 \cong \varphi^*\rho_{|_{SU(n)\times SU(m)}} = \rho_{|_{SU(n)\times SU(m)}}$. Let now $H = diag\,(i\,h_1, ..., i\,h_n)$ with $h_j\in\mathbb{R}$ for $j = 1, .., n$ and $h_1+\cdots+h_n = 0$. Let $H^{'} = diag\,(i\,h^{'}_1, ..., i\,h^{'}_m)$ with $h^{'}_j\in\mathbb{R}$ for $j = 1, .., m$ and $h^{'}_1+\cdots+h^{'}_m = 0$, and let $\theta\in\mathbb{R}$. We have $\varphi_*(\,(H\,,\,H^{'})\,,\,i\theta\,) = (\,i\,m\,\theta\,I_n + H\,,\,-i\,n\,\theta\,I_m + H^{'}\,)$ where φ_* denotes the differential of φ at $(\,(I_n\,,\,I_m)\,,\,1\,)$. Let ψ be the dual map of the $\mathbb{C}$-linear extension of φ. If $\mu = (l_1, .., l_n)(j_1, .., j_{m-1})$ is the highest weight of ρ, then we observe that

$$\begin{aligned}
\psi(\mu)(\,(H\,,\,H^{'})\,,\,i\,\theta\,) &= \mu(\,i\,m\,\theta\,I_n + H\,,\,-i\,n\,\theta\,I_m + H^{'}\,)\\
&= i\sum_{p=1}^{n} l_p(m\,\theta + h_p) + i\sum_{p=1}^{m-1} j_p(-n\,\theta + h^{'}_p)\\
&= i\sum_{p=1}^{n-1}(l_p - l_n)\,h_p + \sum_{p=1}^{m-1} j_p\,h^{'}_p + i\,(m\sum_{p=1}^{n} l_p - n\sum_{p=1}^{m-1} j_p)\,\theta.
\end{aligned}$$

This shows that $\psi(\mu) = (\,\nu\,,\,\gamma\,)$ where $\nu = (l_1 - l_n, .., l_{n-1} - l_n)(j_1, .., j_{m-1})$ and $\gamma = (m\sum_{p=1}^{n} l_p - n\sum_{p=1}^{m-1} j_p)$. Consequently, $\rho_{|_{SU(n)\times SU(m)}}$ is an irreducible representation with highest weight $\nu = (l_1 - l_n, ..., l_{n-1} - l_n)(j_1, ..., j_{m-1})$. $\square$

Remark. If ρ is an irreducible representation of $S(U(n)\times U(1)) \cong U(n)$ with highest weight $\mu = (l_1, ..., l_n)\,(n\geq 2)$, then $\rho_{|_{SU(n)\times\{1\}}}$ is an irreducible representation with highest weight $\nu = (l_1 - l_n, ..., l_{n-1} - l_n)$ (see Lemma 9).

Next, we give the main result of this section.

Proposition 5 *Let τ_λ be an irreducible representation of $SU(n+m)$ with highest weight $\lambda = (\,\lambda_1, ..., \lambda_{n+m-1}\,)$ $(n\geq m\geq 1)$. Let τ_μ be an irreducible representation of $SU(n)\times SU(m)$ with highest weight μ. Then the multiplicity $m_{\,\tau_\lambda|_{SU(n)\times SU(m)}}(\,\tau_\mu\,)$ is non-zero if and only if there exists an irreducible representation τ_ν of $S(U(n)\times U(m))$ such that*

$$\tau_\nu|_{SU(n)\times SU(m)} \cong \tau_\mu \quad and \quad m_{\,\tau_\lambda|_{S(U(n)\times U(m))}}(\,\tau_\nu\,) \neq 0.$$

Proof. We continue to denote $G_1 = SU(n+m)$, and $K_1 = S(U(n)\times U(m))$. Let us denote $K_2 = SU(n)\times SU(m)$. Let τ_λ and τ_μ be as above. Since we have $Res^{K_1}_{K_2}(\,Res^{G_1}_{K_1}\tau_\lambda\,) = Res^{G_1}_{K_2}\tau_\lambda$, we can write

$$m_{\,\tau_\lambda|_{K_2}}(\,\tau_\mu\,) \;=\; \sum_{\tau_\nu\in\widehat{K_1}} m_{\tau_\lambda|_{K_1}}(\,\tau_\nu\,)\,m_{\tau_\nu|_{K_2}}(\tau_\mu).$$

This shows that $m_{\,\tau_\lambda|_{K_2}}(\,\tau_\mu\,) \neq 0$ if and only if there exists $\tau_\nu\in\widehat{K_1}$ such that $m_{\,\tau_\nu|_{K_2}}(\,\tau_\mu\,) \neq 0$ (in this case, $m_{\,\tau_\nu|_{K_2}}(\,\tau_\mu\,) = 1$, i.e., $\tau_\nu|_{K_2} \cong \tau_\mu$) and $m_{\,\tau_\lambda|_{K_1}}(\,\tau_\nu\,) \neq 0$. $\square$

Corollary 4 *Let τ_λ be an irreducible representation of $SU(n+m)$ with highest weight $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_{n+m-1})$ $(n \geq m \geq 1)$. Let ρ denote the trivial representation of $SU(n) \times SU(m)$. Then the multiplicity $m_{\tau_\lambda|_{SU(n)\times SU(m)}}(\rho)$ is non-zero if and only if*
(1) *for $m = 1$, λ is of the form*

$$\lambda = \begin{cases} (a + 2b_1, a + b_1, ..., a + b_1) & \text{if } n \geq 2, \\ (a + 2b_1) & \text{if } n = 1, \end{cases}$$

with $a \in \mathbb{Z}$ and $b_1 \geq Sup\{0, -a\}$;
(2) *for $m \geq 2$, λ is of the form*

$$\lambda = \begin{cases} (a + 2b_1, a + b_1 + b_2, .., a + b_1 + b_m, a + b_1, ..., a + b_1, b_1 - b_m, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ...., b_1 - b_2) \text{ if } n \geq m+1, \\ (a + 2b_1, a + b_1 + b_2, .., a + b_1 + b_m, b_1 - b_m, ..., b_1 - b_2) \text{ if } n = m, \end{cases}$$

with $a \in \mathbb{Z}$ and $b_1 \geq b_2 \geq .... \geq b_m \geq Sup\{0, -a\}$.

Proof. Let τ_λ be as above. By Proposition 5, $m_{\tau_\lambda|_{SU(n)\times SU(m)}}(\rho) \neq 0$ if and only if there exists an irreducible representation τ_ν of $S(U(n) \times U(m))$ such that $\tau_\nu|_{SU(n)\times SU(m)} \cong \rho$ and $m_{\tau_\lambda|_{S(U(n)\times U(m))}}(\tau_\nu) \neq 0$. The condition $\tau_\nu|_{SU(n)\times SU(m)} \cong \rho$ shows that ν is of the form $\nu = (a, ..., a)(0, .., 0)$ with $a \in \mathbb{Z}$. Then we conclude the proof by applying Corollary 3. $\square$

5 Determination of the spectra of certain invariant differential operators

5.1 Spectrum of the Bochner-Laplacian on line bundles over complex Grassmannians

First, we make some general remarks about the Bochner-Laplacian for homogeneous vector bundles over compact bases. Let G be a compact Lie group, and let K be a closed subgroup of G. We denote by $\mathfrak{g}$ and $\mathfrak{k}$ the respective Lie algebras of G and K. Let us fix a G-invariant inner product $\langle\ ,\ \rangle$ on $\mathfrak{g}$. Then we have the reductive decomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ where $\mathfrak{m} = \mathfrak{k}^{\perp, \langle\ ,\ \rangle}$ is an $Ad(K)$-invariant subspace of $\mathfrak{g}$. In a natural way, we obtain a G-invariant metric on the Riemannian homogeneous space $M = G/K$ which we also denote by $\langle\ ,\ \rangle$. Note that the isotropy representation of G/K is equivalent to the adjoint action of K in $\mathfrak{m}$. So, the tangent bundle TM of M can be identified with the homogeneous vector bundle $G \times_{K, Ad} \mathfrak{m}$.
Now, the group K acts on G from the right and the canonical projection $\pi : G \longrightarrow G/K$ is a K-principal bundle. For $X \in \mathfrak{k}$, the fundamental vector field of the K-action is given by

$$\tilde{X}(g) = \frac{d}{dt}\Big|_0 g \cdot exp(tX).$$

Thus, $\tilde{X}$ coincides with the left invariant vector field X^G corresponding to the vector $X \in \mathfrak{k}$.

For $g \in G$, we denote by L_g and R_g respectively the left and right translations in G. Then the vertical tangent space of the K-principal bundle $\pi : G \longrightarrow G/K$ at the point g coincides with the space $dL_g(\mathfrak{k})$. Moreover, we have the direct sum decomposition $T_gG = dL_g(\mathfrak{k}) \oplus dL_g(\mathfrak{m})$. Since the space $dL_g(\mathfrak{m})$ is right invariant under the K-action, the above splitting defines a connection in the K-principal bundle $(G\,, \pi\,, G/K)$. Let Θ be the left-invariant Maurer-Cartan form of the Lie group $G\,;\, \Theta : TG \longrightarrow \mathfrak{g}$, $\Theta(t_g) = dL_{g^{-1}}(t_g)$ for $t_g \in T_gG$. We can easily see that the 1-form $Z := pr_{\mathfrak{k}} \circ \Theta$ is a G-invariant connection in $(G\,, \pi\,, G/K)$. Note that Z induces a covariant derivative ∇^Z in $TM = G \times_{K\,,\,Ad} \mathfrak{m}$. By the invariance property of $\langle\ ,\ \rangle$, we can see that ∇^Z is torsion free and is compatible with the Riemannian metric. Thus, the connection Z agrees with the Levi-Civita connection of $M = G/K$ (see $[Fr]$ for more details).

Let $\rho : K \longrightarrow U(V)$ be a finite-dimensional unitary representation of K, and let $E = G \times_{K\,,\,\rho} V$ be the associated homogeneous vector bundle over M. We denote by $C^\infty(G,\ V)^{K\,,\,\rho}$ the vector space of C^∞ functions $f : G \longrightarrow V$ satisfying the condition

$$f(gk) = \rho(k^{-1})\, f(g) \quad \text{for all } g \in G,\ k \in K.$$

Recall that this space is linearly isomorphic to $\Gamma^\infty(E)$, the space of C^∞ sections of E. For $s \in \Gamma^\infty(E)$, we will denote by $\tilde{s}$ the element in $C^\infty(G\,, V)^{K\,,\,\rho}$ corresponding to s under this isomorphism. Let $X \in \chi(M)$ be a C^∞ vector field on M, and let $s \in \Gamma^\infty(E)$. If we denote by ∇ the induced connection on E, then we have (see, e.g., Proposition III. 1.3 in $[KN]$) the relation

$$\widetilde{\nabla_X s} = X^* \cdot \tilde{s},$$

where X^* is the horizontal lift of X to G with respect to the connection Z. Let $\nabla^*\nabla : \Gamma^\infty(E) \longrightarrow \Gamma^\infty(E)$ be the Bochner-Laplacian relative to the natural L^2-structure on sections of E (see, e.g., $[W]$). Then we define an associated operator $\widetilde{\nabla^*\nabla}$ acting on $C^\infty(G\,, V)^{K\,,\,\rho}$ by

$$\widetilde{\nabla^*\nabla}\, \tilde{s} := (\widetilde{\nabla^*\nabla s}) \quad \text{for every } s \in \Gamma^\infty(E).$$

Let $\{X_1, ..., X_p, X_{p+1}, ..., X_N\}$ be an orthonormal basis of $\mathfrak{g}$ such that $\{X_1, ..., X_p\}$ is a basis of $\mathfrak{m}$. Let $\Omega_{_G} = -\sum_{j=1}^N X_j{}^2$ and $\Omega_{_K} = -\sum_{j=p+1}^N X_j{}^2$ be the Casimir operators of G and K relative to $\langle\ ,\ \rangle$ and $\langle\ ,\ \rangle|_{\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}}$, repectively. Then the operator $\widetilde{\nabla^*\nabla}$ can be expressed in terms of $\Omega_{_G}$ and $\Omega_{_K}$ as follows.

Lemma 12 *For every $s \in \Gamma^\infty(E)$, we have $\widetilde{\nabla^*\nabla}\, \tilde{s} = (\,\Omega_{_G} - \Omega_{_K}\,) \cdot \tilde{s}$.*

Proof. The differential operators $\widetilde{\nabla^*\nabla}$ and $\Omega_{_G} - \Omega_{_K}$ are both left G-invariant. Thus, to prove the lemma, it suffices to show that

$$(\widetilde{\nabla^*\nabla}\, \tilde{s})(e) = ((\,\Omega_{_G} - \Omega_{_K}\,) \cdot \tilde{s})(e) \quad \text{for every } s \in \Gamma^\infty(E).$$

Let $\varepsilon > 0$ and let

$$B(\,0_{\mathbb{R}^p}\,,\, \varepsilon\,) \ni t = (t_1, ..., t_p) \overset{\varphi}{\longmapsto} exp\,(\,\textstyle\sum_{i=1}^p\, t_i\, X_i\,)\, K$$

be local normal coordinates around 0. For all $1 \leq i \leq p$, we define a vector field Y_i on the open set $U := \varphi(B(0_{\mathbb{R}^p}, \varepsilon))$ by setting

$$Y_i(\varphi(t)) = \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t_i} \quad \text{for } 0 \leq |t| < \varepsilon.$$

Observe that the local vector fields $Y_1, ..., Y_p$ form an orthonormal basis of the tangent space at the point $0 = eK$. Then, for a local section $s \in \Gamma^\infty(U, E)$, we can write

$$(\nabla^* \nabla s)_0 = (- \textstyle\sum_{i=1}^p \nabla_{Y_i} \nabla_{Y_i} s)_0,$$

and hence

$$(\widetilde{\nabla^* \nabla}\, \tilde{s})(e) = (- \textstyle\sum_{i=1}^p \widetilde{\nabla_{Y_i} \nabla_{Y_i} s})(e) = - \textstyle\sum_{i=1}^p ((Y_i{}^*)^2 \cdot \tilde{s})(e),$$

where $Y_i{}^*$ is the horizontal lift of Y_i to G. For $i = 1, ..., p$, let X_i^G denote the left invariant vector field corresponding to the vector $X_i \in \mathfrak{m}$ (i.e., $X_i^G(e) = X_i$), and let $\gamma_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow G$ be the curve defined by $\gamma_i(t) = exp(t X_i)$. Note that

$$dL_{\gamma_i(t)^{-1}}(\dot{\gamma}_i(t)) = dL_{\gamma_i(t)^{-1}}(X_i^G(\gamma_i(t))) = X_i^G(e) = X_i \in \mathfrak{m}.$$

Thus, for all $1 \leq i \leq p$, the curve γ_i is horizontal. On the other hand, if $0 \leq |t| < \varepsilon$ and if $1 \leq i \leq p$, then we have

$$d\pi(Y_i{}^*(\gamma_i(t))) = Y_i(\pi(\gamma_i(t))) = d\pi(\dot{\gamma}_i(t)).$$

We deduce that $Y_i{}^*(\gamma_i(t)) = \dot{\gamma}_i(t)$ for all $1 \leq i \leq p$, $0 \leq |t| < \varepsilon$. Now, let us fix i with $1 \leq i \leq p$ and let $s \in \Gamma^\infty(U, E)$. We observe that

$$\begin{aligned}
((Y_i{}^*)^2 \cdot \tilde{s})(e) &= \frac{d}{du}\Big|_{u=0} \{(Y_i{}^* \cdot \tilde{s})(\gamma_i(u))\} \\
&= \frac{d}{du}\Big|_{u=0} \left\{ \frac{d}{dv}\Big|_{v=u} \tilde{s}(\gamma_i(v)) \right\} \\
&= \frac{d^2}{du^2}\Big|_{u=0} \tilde{s}(\gamma_i(u)) \\
&= ((X_i)^2 \cdot \tilde{s})(e).
\end{aligned}$$

Consequently, we obtain that

$$(\widetilde{\nabla^* \nabla}\, \tilde{s})(e) = -(\textstyle\sum_{i=1}^p (X_i)^2 \cdot \tilde{s})(e) = ((\Omega_G - \Omega_K) \cdot \tilde{s})(e),$$

and this concludes the proof of the lemma. □

Next, let $E = G \times_{K, \rho} \mathbb{C}$ be a 1-dimensional complex vector bundle over $M = G/K$. For $a \in \mathbb{Z}$, we denote by ∇_a the induced connection on the tensor power $E^{\otimes a}$ of the bundle E. As we have seen, the Bochner-Laplacian $\nabla_a{}^* \nabla_a$ acting on $\Gamma^\infty(G/K, E^{\otimes a})$ is related to the Casimir operators Ω_G and Ω_K acting on $C^\infty(G, \mathbb{C})^{K, \rho^{\otimes a}}$, where $\rho^{\otimes a}$ is the induced tensor product representation. More precisely, we have the following identity.

Corollary 5 *If $s \in \Gamma^\infty(G/K, E^{\otimes a})$, then*

$$\widetilde{\nabla_a{}^* \nabla_a}\, \tilde{s} = \Omega_G \cdot \tilde{s} + (a^2 \sum_{j=p+1}^{N} (\rho_*(X_j))^2)\tilde{s}.$$

Proof. Let $\{X_1, ..., X_p, X_{p+1}, ..., X_N\}$ be an othonormal basis of $\mathfrak{g}$ as above. For $s \in \Gamma^\infty(G/K\,,\, E^{\otimes a})$, we have proved that $\widetilde{\nabla_a{}^*\nabla_a}\,\tilde{s} = (\,\Omega_{_G} - \Omega_{_K}\,)\cdot\tilde{s}$ where $\Omega_{_G} = -\sum_{j=1}^N {X_j}^2$ and $\Omega_{_K} = -\sum_{j=p+1}^N {X_j}^2$ are the Casimir operators of G and K relative to $\langle\ ,\ \rangle$ and $\langle\ ,\ \rangle|_{\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}}$, repectively. Now, for $j = p+1, ..., N$, observe that

$$\begin{aligned}
(\,X_j\cdot\tilde{s}\,)(g) &= \frac{d}{dt}\Big|_0\,\tilde{s}(\,g\,exp(tX_j)\,)\\
&= \frac{d}{dt}\Big|_0\,\rho^{\otimes a}(\,exp(-tX_j)\,)\,\tilde{s}(g)\\
&= \frac{d}{dt}\Big|_0\,\rho(\,exp(-tX_j)\,)^a\,\tilde{s}(g)\\
&= -a\,\rho_*(X_j)\,\tilde{s}(g)
\end{aligned}$$

for all $g \in G$. Thus, we obtain that

$$\Omega_{_K}\cdot\tilde{s} = -(\,a^2\,\textstyle\sum_{j=p+1}^N(\rho_*(X_j))^2\,)\tilde{s}\,.$$

This completes the proof. $\square$

Remarks. (1) In the above notations, we fix $G = U(n+m)$, $K = U(n)\times U(m)$, and $\langle\ ,\ \rangle$ the inner product on $\mathfrak{g}$ given by $\langle\,X\,,\,Y\,\rangle = -Tr\,(X\,Y)$ for $X, Y \in \mathfrak{g}$. For $j = 1, .., n+m$, let $H_j = diag\,(h_1, ..., h_{n+m})$ be the diagonal matrix given by $h_l = \sqrt{-1}\,\delta_{j\,l}$ for all $1 \le l \le n+m$. Let $\{X_1, ..., X_p, X_{p+1}, ..., X_N\}$ be an othonormal basis of $\mathfrak{g}$ as above such that $\{H_1, ..., H_{n+m}\} \subset \{X_{p+1}, ..., X_N\}$.

Recall that G/K is diffeomorphic to the complex Grassmannian $Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$. Let $Det := \{(E\,,\,v) \in Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})\times\wedge^n(\mathbb{C}^{n+m})\ ;\ v \in \wedge^n(E)\}$ be the determinant line bundle over $Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$. Let $\rho_1 : K \longrightarrow GL(\mathbb{C}^n)$ be the representation given by

$$\rho_1\left(\begin{pmatrix} k_1 & 0\\ 0 & k_2\end{pmatrix}\right) = k_1,$$

where $k_1 \in U(n)$, and $k_2 \in U(m)$ (i.e., $\rho_1 = pr_1$). Observe that $Det \cong G\times_{K\,,\,\wedge^n\rho_1}(\,\wedge^n(\mathbb{C}^n)\,)$, where $\wedge^n\rho_1$ is the induced exterior power representation on $\wedge^n(\mathbb{C}^n)$. Thus, $Det \cong G\times_{K\,,\,\rho}\mathbb{C}$ with $\rho = det\circ pr_1$. For $a \in \mathbb{Z}$, one deduces that $Det^{\otimes a} \cong G\times_{K\,,\,\rho^{\otimes a}}\mathbb{C}$ with $\rho^{\otimes a}(k) = (\rho(k))^a = (\,(det\circ pr_1)(k)\,)^a$ for all $k \in K$. Note that

$$\begin{aligned}
\sum_{j=p+1}^N(\,(\rho^{\otimes a})_*(X_j)\,)^2 &= a^2\sum_{j=p+1}^N(\,\rho_*(X_j)\,)^2\\
&= a^2\sum_{j=p+1}^N(\,Tr\circ pr_1(X_j)\,)^2\\
&= a^2\sum_{j=1}^n(\,Tr(H_j)\,)^2\\
&= -n\,a^2.
\end{aligned}$$

Consequently, for $a \in \mathbb{Z}$ and $s \in \Gamma^\infty(\,G/K\,,\,Det^{\otimes a}\,)$, we obtain that

$$\widetilde{\nabla_a{}^*\nabla_a}\,\tilde{s} = (\,\Omega_{G} - n\,a^2\,)\cdot\tilde{s}.$$

(2) Note that the complex Grassmannian $Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$ is also diffeomorphic to G_1/K_1 where $G_1 = SU(n+m)$, and $K_1 = S(U(n)\times U(m))$. Let B be the Killing form of the Lie algera $\mathfrak{g}_1$ of G_1. The inner product $\langle\ ,\ \rangle = -B$ on $\mathfrak{g}_1$ induces a Riemannian metric on $Gr_n(\mathbb{C}^{n+m}) \cong G_1/K_1$ denoted again by $\langle\ ,\ \rangle$. Observe that $Det \cong G_1\times_{K_1\,,\,\rho}\mathbb{C}$, with $\rho = det\circ pr_1$. Relative to the metric $\langle\ ,\ \rangle$, we can define the Bochner-Laplacian $\nabla_a{}^*\nabla_a$ acting on $\Gamma^\infty(\,G_1/K_1\,,\,Det^{\otimes a}\,)$ for $a\in\mathbb{Z}$. Let Ω_{G_1} be the Casimir operator of G_1 with respect to $\langle\ ,\ \rangle$. Then, by the same computation as above, we see that $\widetilde{\nabla_a{}^*\nabla_a} = \Omega_{G_1} + a^2\,\xi$ where ξ is a constant independent of a. Later, we shall calculate explicitely this constant ξ.

Next, we are going to compute the spectrum of the Bochner-Laplacian $\nabla_a{}^*\nabla_a$ acting on $\Gamma^\infty(\,Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})\,,\,Det^{\otimes a}\,)$ where $a\in\mathbb{Z}$ and $n\geq m\geq 1$. For this aim, we shall identify the Grassmannian $Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$ with the homogeneous space $U(n+m)/(U(n)\times U(m))$. In particular, the Riemannian metric on $Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$ will be chosen as above. Under these assumptions, we find the following description of the spectrum.

Proposition 6 *For $a\in\mathbb{Z}$ and $n\geq m\geq 1$, the spectrum of $\nabla_a{}^*\nabla_a$ acting on $\Gamma^\infty(\,Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})\,,\,Det^{\otimes a}\,)$ is given by*

$Spec_{\,\nabla_a{}^*\nabla_a}\,(\,\Gamma^\infty(\,Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})\,,\,Det^{\otimes a}\,)\,) = \big\{\lambda_b = 2\,\big(\sum_{j=1}^m b_j(b_j+n+m-2j+1+a)\big) + n\,m\,a\,;\ b = (\,b_1,...,b_m\,)\in\mathbb{N}^m$ *with* $b_1\geq ...\geq b_m\geq Sup\,\{0\,,\,-a\}\big\}$.

Proof. Let the pair $(\,G\,,\,K\,)$ be as above. For $a\in\mathbb{Z}$, recall that $Det^{\otimes a}\cong G\times_{K\,,\,\rho^a}\mathbb{C}$ where $\rho^a(k) := (\,det\circ pr_1(k)\,)^a$ for all $k\in K$. Note that ρ^a is an irreducible representation of K with highest weight $\mu = (a,...,a)(0,...,0)$. Via the identification $\Gamma^\infty(\,Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})\,,\,Det^{\otimes a}\,) = C^\infty(G\,,\,\mathbb{C})^{K\,,\,\rho^a}$, we shall write $\nabla_a{}^*\nabla_a = \Omega_{G} - n\,a^2$. Let $L^2(\,G/K\,,\,Det^{\otimes a}\,)$ be the space of square-integrable sections of the bundle $Det^{\otimes a}$ over G/K. Applying the Peter-Weyl theorem, we obtain that

$$L^2(\,G/K\,,\,Det^{\otimes a}\,)\cong\widehat{\bigoplus_{\gamma\in\widehat{G}}}\,m_{\gamma|_K}(\rho^a)\ V_\gamma.$$

Note that $\Omega_{G}|_{V_\gamma} = c(\gamma)\,Id$ with $c(\gamma) = \langle\,\lambda_\gamma + 2\,\delta_G\,,\,\lambda_\gamma\,\rangle$ (see, e.g., $[W]$) where λ_γ and δ_{G} are respectively the highest weight of γ and half the sum of the positive roots of G (with respect to the system of positive roots given in the first section). Since $\nabla_a{}^*\nabla_a$ is an elliptic operator, the spectrum is given as follows:

$$Spec_{\,\nabla_a{}^*\nabla_a}\,(\Gamma^\infty(\,G/K\,,\,Det^{\otimes a}\,)) = \{\,c(\gamma) - n\,a^2\ ;\ \gamma\in\widehat{G}\,,\,m_{\gamma|_K}(\rho^a)\neq 0\}.$$

By Proposition 4, we know that $m_{\gamma|_K}(\rho^a)\neq 0$ if and only if λ_γ is of the form

$$\lambda_\gamma = \begin{cases}(\,\lambda_1\,,..,\,\lambda_m\,,a\,,...,\,a\,,\,a-\lambda_m\,,...,\,a-\lambda_1\,) & \text{if } n\geq m+1,\\ (\,\lambda_1\,,...,\,\lambda_m\,,\,a-\lambda_m\,,...,\,a-\lambda_1\,) & \text{if } n = m,\end{cases}$$

with $\lambda_1\geq\lambda_2\geq ....\geq\lambda_m\geq Sup\,\{0\,,\,a\}$.

Let λ_γ be of the above form. Recall that $2\,\delta_{G} = \sum_{j=1}^{n+m}(n+m-2j+1)\,e_j$ with

$\langle e_i\, ,\, e_j \rangle = \delta_{i\,j}$ for all $1 \leq i\, ,\, j \leq n+m$. Thus, for all $n \geq m$, we easily compute that

$$\begin{aligned} c(\gamma) &= \langle \lambda_\gamma + 2\,\delta_G\, ,\, \lambda_\gamma \rangle \\ &= 2\big(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j(\lambda_j + n + m - 2j + 1 - a)\big) + na(a-m). \end{aligned}$$

Setting $b_j = \lambda_j - a$ for all $1 \leq j \leq m$, we find that

$$c(\gamma) - n\,a^2 \;=\; 2\big(\sum_{j=1}^{m} b_j(b_j + n + m - 2j + 1 + a)\big) + n\,m\,a,$$

with $b_1 \geq ... \geq b_m \geq Sup\,\{0\, ,\, -a\}$. This shows the proposition. $\square$

Remark. For $a \in \mathbb{Z}$, it is clear that the smallest eigenvalue of $\nabla_a{}^*\nabla_a$ on $\Gamma^\infty(\,Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})\, ,\, Det^{\otimes a})$ is $\lambda = n\,m|a|$.

5.2 The "line bundle part" of the Dirac spectrum on complex Grassmannians

Let us consider the pair $(G_1\, ,\, K_1) = (SU(n+m)\, ,\, S(U(n) \times U(m))$. Note that $M = G_1/K_1$ is a simply connected Riemannian symmetric space. Moreover, $M \cong Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$ is a compact Kähler manifold of complex dimension $n\,m$. Thus M admits a spin stucture if and only if there exists a square root of the canonical bundle $K_M = \wedge^{n\,m\,,\,0} M$, i.e., a complex line bundle L such that $L \otimes L \cong K_M$ ($[H]$). Equivalently, M has a spin stucture (which must be unique in this case) if and only if $n+m$ is even ($[CG]$). Let us assume from now that $n+m$ is even. Let S be the spinor bundle associated to the homogeneous spin structure of M. Recall that S is a homogeneous vector bundle over M. Since M is a Kähler spin manifold, we have ($[Fr]$) the isomorphism

$$S \cong S_0 \oplus ..... \oplus S_{n\,m}$$

where $S_{n\,m}$ is the square root of the canonical bundle, $S^2_{n\,m} = K_M$, and $S_r = \wedge^{n\,m-r\,,\,0} M \otimes S_{n\,m}$ for all $0 \leq r \leq nm$. Observe that S_0 and S_{nm} are the only rank one subbundles in the above decomposition.
Next we shall be interested in the subbundles S_0 and S_{nm}. Note that $K_M \cong G_1 \times_{K_1\,,\,\rho} \wedge^{n\,m}(\,\mathbb{C}^n \otimes (\mathbb{C}^m)^*\,)$ where the isotropy representation $\rho = \wedge^{n\,m} Ad^*$ is irreducible with highest weight (see the appendix)

$$\begin{aligned} \Lambda &= (n+m)(\,e_1 + \cdots + e_n\,) \\ &= (n+m, ..., n+m)(0, ..., 0). \end{aligned}$$

This yields an isomorphism $S_{n\,m} \cong G_1 \times_{K_1\,,\,\tau_\mu} \mathbb{C}$, where $\tau_\mu : K_1 \longrightarrow GL(\mathbb{C})$ is an irreducible representation with highest weight

$$\mu = (\,\frac{n+m}{2}, ..., \frac{n+m}{2}\,)(\,0, ..., 0\,).$$

Similarly, one deduces that $S_0 \cong G_1 \times_{K_1\,,\,\tau_\nu} \mathbb{C}$ where $\tau_\nu : K_1 \longrightarrow GL(\mathbb{C})$ is an irreducible representation with highest weight

$$\nu = (\,-\frac{n+m}{2}, ..., -\frac{n+m}{2}\,)(\,0, ..., 0\,).$$

Let $Det \cong G_1 \times_{K_1\,,\,\rho_1} \mathbb{C}$ with $\rho_1 = det \circ pr_1$, be the determinant line bundle over $M \cong Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$. Then we have obviously the following isomorphisms

$$S_0 \cong Det^{\otimes(\,-\frac{n+m}{2}\,)}\,, \quad S_{nm} \cong Det^{\otimes(\,\frac{n+m}{2}\,)}.$$

Let now $D : \Gamma^\infty(S) \longrightarrow \Gamma^\infty(S)$ be the Dirac operator, and let D^2 be its square. Since $M = G_1/K_1$ is a simply connected compact Riemannian symmetric space with scalar curvature $R = n\,m$, we have ([Fr]) the identification

$$D^2 = \Omega_{_{G_1}} + \frac{n\,m}{8}.$$

Remarks. (1) As before, let $\mathfrak{g}_1$ be the Lie algebra of G_1, and let B be its Killing form. Consider on M the Riemannian metric induced from the inner product in $\mathfrak{g}_1$ given by $\langle\ ,\ \rangle = -B$. If we denote by $\nabla^*\nabla$ the Bochner-Laplacian acting on $\Gamma^\infty(S)$, then we have ([Fr]) the Schrödinger-Lichnerowicz formula

$$D^2 = \nabla^*\nabla + \frac{n\,m}{4}.$$

From this formula and the above observations, we obtain the following identification of operators acting on S

$$\nabla^*\nabla = \Omega_{_{G_1}} - \frac{n\,m}{8}.$$

A fortiori, this formula holds of course true if the action of $\nabla^*\nabla$ is restricted to $\Gamma^\infty(\,G_1/K_1\,,\,Det^{\otimes(\,\frac{n+m}{2}\,)}\,)$. For $a \in \mathbb{Z}$, we have already observed that the Bochner-Laplacian ${\nabla_a}^*\nabla_a$ acting on $\Gamma^\infty(\,G_1/K_1\,,\,Det^{\otimes a}\,)$ can be identified with an operator of the form $\Omega_{_{G_1}} + a^2\,\xi$ where ξ is a constant independent of a. In particular, for $a = \frac{n+m}{2}$, we have that

$$\nabla^*\nabla = \Omega_{_{G_1}} - \tfrac{n\,m}{8} = \Omega_{_{G_1}} + (\tfrac{n+m}{2})^2\,\xi.$$

This implies that $\xi = -\frac{n\,m}{2(n+m)^2}$, and then

$${\nabla_a}^*\nabla_a = \Omega_{_{G_1}} - \tfrac{n\,m\,a^2}{2(n+m)^2}.$$

(2) Since the Killing form B of $\mathfrak{g}_1$ is given by

$$B(X\,,\,Y) = 2\,(n+m)\,Tr(\,XY\,) \quad \text{for all } X\,,\,Y \in \mathfrak{g}_1,$$

we deduce that $Spec_{\,{\nabla_a}^*\nabla_a}\,(\,\Gamma^\infty(\,G_1/K_1\,,\,Det^{\otimes a}\,)\,) =$
$\big\{\,\frac{1}{2(n+m)}\,\lambda\,;\ \lambda \in Spec_{\,{\nabla_a}^*\nabla_a}\,(\,\Gamma^\infty(\,G/K\,,\,Det^{\otimes a}\,)\,)\big\} =$
$\big\{\lambda_b = \frac{1}{n+m}\,\big(\sum_{j=1}^m\,b_j(b_j+n+m-2j+1+a)\big) + \frac{n\,m\,a}{2(n+m)}\,;\, b = (\,b_1\,...,b_m\,) \in \mathbb{N}^m$ with $b_1 \geq ... \geq b_m \geq Sup\,\{0\,,\,-a\}\big\}$.

Corollary 6 *In the above notations and for $n \geq m \geq 1$, one has*

(1) $Spec_{\,D^2}(\,\Gamma^\infty(Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})\,,\,S_0)\,) = \big\{\lambda_b = \frac{1}{2(n+m)}\,\big(\sum_{j=1}^m\,b_j(2\,b_j+n+m-4\,j+2)\big)\,;\, b = (\,b_1,...,b_m\,) \in \mathbb{N}^m$ *with* $b_1 \geq .... \geq b_m \geq \frac{n+m}{2}\big\}$.

(2) $Spec_{\,D^2}(\,\Gamma^\infty(Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})\,,\,S_{n\,m})\,) = \big\{\lambda_b = \frac{1}{2(n+m)}\,\big(\sum_{j=1}^m\,b_j(2\,b_j+3\,n+3\,m-4\,j+2)\big) + \frac{n\,m}{2}\ ;\, b = (\,b_1,...,b_m\,) \in \mathbb{N}^m$ *with* $b_1 \geq .... \geq b_m \geq 0\big\}$.

Proof. By the Schrödinger-Lichnerowicz formula, we can immediately derive this corollary as a consequence of the above remark. $\square$

Remark. Observe that the smallest eigenvalue of D^2 on $\Gamma^\infty(Gr_n(\mathbb{C}^{n+m}), S_0)$ (resp. $\Gamma^\infty(Gr_n(\mathbb{C}^{n+m}), S_{nm})$) is $\lambda = \frac{nm}{2}$.

5.3 The Laplace spectrum of the unit determinant bundle

Let $U(Det) := \{ (E, v) \in Det\,;\, \|v\| = 1 \}$ be the unit determinant bundle over the Grassmannian $Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$. As before, we consider the pair $(G_1, K_1) = (SU(n+m), S(U(n) \times U(m)))$, and we set $K_2 = SU(n) \times SU(m)$. The group G_1 acts from the left on the determinant bundle by

$$g \cdot (E, v) = (g(E), g \cdot v) \;\text{ for } (g, (E, v)) \in G_1 \times Det.$$

This action is clearly transitive on $U(Det)$. Let E_1 be the subspace spanned by the first n vectors of the canonical basis $\{f_1, ..., f_{n+m}\}$ of $\mathbb{C}^{n+m}$ and let $v_1 = f_1 \wedge ... \wedge f_n$. Denote by $Stab_{(E_1, v_1)} G_1$ the isotropy subgroup of the point (E_1, v_1) and observe that $Stab_{(E_1, v_1)} G_1 \subset Stab_{E_1} G_1 = K_1$. Let now

$$g = \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \in Stab_{(E_1, v_1)} G_1.$$

Observe that $g \cdot v_1 = (det\, g_1)v_1$. Hence, we get $det\, g_1 = 1$. Since $det\, g = (det\, g_1)(det\, g_2) = 1$, we deduce that $det\, g_2 = 1$. So, $g \in K_2$, and thus $Stab_{(E_1, v_1)} G_1 = K_2$. Finally, we conclude that $U(Det)$ is diffeomorphic to $G_1/K_2 = SU(n+m)/(SU(n) \times SU(m))$.

Let Δ denote the Hodge-Laplacian acting on $C^\infty(U(Det))$. Let $C^\infty(G_1, \mathbb{C})^{K_2}$ be the vector space of C^∞ functions $f : G_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ such that

$$f(gk) = f(g) \;\text{ for all } g \in G_1,\ k \in K_2.$$

Recall that the linear isomorphism $C^\infty(G_1/K_2, \mathbb{C}) \cong C^\infty(G_1, \mathbb{C})^{K_2}$ allows us to identify Δ with the Casimir operator Ω_{G_1} of G_1 (see, e.g., $[IT]$).

Proposition 7 *Let $U(Det)$ be the unit determinant bundle over the Grassmannian $Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$. For $n \geq m \geq 1$, the spectrum of the Hodge-Laplacian Δ on $C^\infty(U(Det))$ is given by*

$Spec_\Delta(C^\infty(U(Det))) = \big\{ \frac{1}{n+m} \big(\sum_{j=1}^m b_j\, (b_j + n + m - 2\,j + 1 + a) \big) + \frac{n\,m\,a}{2(n+m)} + \frac{n\,m\,a^2}{2(n+m)^2}$ *;* $a \in \mathbb{Z},\ b = (b_1, ..., b_m) \in \mathbb{N}^m$ *with* $b_1 \geq ... \geq b_m \geq Sup\,\{0, -a\} \big\}$.

Proof. We will give a proof using directly the branching from $G_1 = SU(n+m)$ to $K_2 = SU(n) \times SU(m)$. Applying the Peter-Weyl theorem, we see that

$$L^2(U(Det), \mathbb{C}) \cong L^2(G_1/K_2, \mathbb{C}) \cong \widehat{\bigoplus_{\gamma \in \widehat{G_1}}} m_{\gamma|_{K_2}}(\rho)\; V_\gamma,$$

where ρ is the trivial representation of K_2. Since $\Omega_{G_1}|_{V_\gamma} = c(\gamma)\, Id$, we obtain that

$$Spec_\Delta(C^\infty(U(Det))) = \{ c(\gamma)\,;\, \gamma \in \widehat{G_1},\ m_{\gamma|_{K_2}}(\rho) \neq 0\}.$$

Now Corollary 4 shows that $m_{\gamma|_{K_2}}(\rho) \neq 0$ if and only if the highest weight λ_γ of γ is of the form
(1) for $m = 1$,

$$\lambda_\gamma = \begin{cases} (\, a + 2\, b_1 \,,\, a + b_1 \,, ..., \, a + b_1 \,) & \text{if } n \geq 2, \\ (\, a + 2\, b_1 \,) & \text{if } n = 1, \end{cases}$$

with $a \in \mathbb{Z}$ and $b_1 \geq Sup\{0\,,\, -a\}\,$;
(2) for $m \geq 2$,

$$\lambda_\gamma = \begin{cases} (\, a + 2\, b_1 \,,\, a + b_1 + b_2 \,, .., \, a + b_1 + b_m \,,\, a + b_1 \,, ..., \, a + b_1 \,,\, b_1 - b_m \,, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ...., \, b_1 - b_2 \,) \ \text{if } n \geq m + 1, \\ (\, a + 2\, b_1 \,,\, a + b_1 + b_2 \,, .., \, a + b_1 + b_m \,,\, b_1 - b_m \,, ..., \, b_1 - b_2 \,) \ \text{if } n = m, \end{cases}$$

with $a \in \mathbb{Z}$ and $b_1 \geq b_2 \geq .... \geq b_m \geq Sup\{0\,,\, -a\}$.

Recall that $c(\gamma) = \langle\, \lambda_\gamma + 2\, \delta_{G_1} \,,\, \lambda_\gamma \,\rangle$ where $\delta_{G_1} = \sum_{j=1}^{n+m-1} (n + m - j) e_j$ is half the sum of the positive roots of G_1 (with respect to the system of positive roots given in the first section). Assume that λ_γ is of the above form. For all $n \geq m$, a simple computation gives that

$$c(\gamma) = \tfrac{1}{n+m} \,(\, \textstyle\sum_{j=1}^{m} \, b_j \,(b_j + n + m - 2\, j + 1 + a)\,) + \tfrac{n\, m\, a}{2(n+m)} + \tfrac{n\, m\, a^2}{2(n+m)^2}\,,$$

where $a \in \mathbb{Z}$ and $b_1 \geq ... \geq b_m \geq Sup\,\{0\,,\, -a\}$. This completes the proof. $\square$

Remarks. (1) The smallest positive eigenvalue of Δ on $C^\infty(\, U(Det)\,)$ is obviously $\lambda = \frac{1}{2(n+m)^2} n\, m(n + m + 1)$.
(2) Observe that

$$Spec_{\Delta}\,(\, C^\infty(\, U(Det)\,)\,) = \bigcup_{a \in \mathbb{Z}} Spec_{\mathcal{D}_a}\,(\, \Gamma^\infty(\, G_1/K_1 \,,\, Det^{\otimes a}\,)\,),$$

where $\mathcal{D}_a := {\nabla_a}^* \nabla_a + \frac{n\, m\, a^2}{2(n+m)^2}$ is identified with the Casimir operator Ω_{G_1} for all $a \in \mathbb{Z}$.
(3) More conceptually, we can get the above result as follows. For $a \in \mathbb{Z}$, denote by $C^\infty_{(a)}(\, U(Det)\,)$ the space of smooth functions $F \in C^\infty(G_1/K_2)$ such that

$$F(gkK_2) = \rho(k)^{-a} F(gK_2) \quad \text{for all } g \in G_1,\ k \in K_1,$$

where $\rho = det \circ pr_1$. Obviously, $C^\infty_{(a)}(\, U(Det)\,)$ is isomorphic as a G_1-representation to $\Gamma^\infty(\, G_1/K_1 \,,\, Det^{\otimes a}\,)$. Let the group S^1 act on the space $C^\infty(\, U(Det)\,)$ by

$$(z \cdot F)(gK_2) := F(gk_z K_2),$$

where $z \in S^1$, $g \in G_1$, and $k_z := diag\,(\, z, \underbrace{1, ..., 1}_{n-1}, z^{-1}, \underbrace{1, ..., 1}_{m-1}\,)$. For $a \in \mathbb{Z}$, let us set

$$C^\infty(\, U(Det)\,)(a) := \{F \in C^\infty(G_1/K_2)\,;\ z \cdot F = z^{-a} F \ \text{ for all } z \in S^1\,\}.$$

Then there is a decomposition into S^1-isotypes:

$$C^\infty(\, U(Det)\,) \cong \widehat{\bigoplus_{a \in \mathbb{Z}}} \, C^\infty(\, U(Det)\,)(a).$$

Let us recall that inside $\widehat{\bigoplus_{a\in\mathbb{Z}}} C^\infty(\,U(Det)\,)(a)$ finite sums are dense.
Let $k \in K_1 = S(U(n)\times U(m))$. There exists $z \in S^1,\ k^{'} \in K_2 = SU(n)\times SU(m)$ such that $k = k_z k^{'}$. Then, for $F \in C^\infty(\,U(Det)\,)(a)$, we have

$$\begin{aligned} F(gkK_2) &= F(gk_zK_2) \\ &= (z\cdot F)(gK_2) \\ &= z^{-a}F(gK_2) \\ &= \rho(k)^{-a}F(gK_2) \quad \text{for all } g\in G_1. \end{aligned}$$

This shows that $C^\infty(\,U(Det)\,)(a) \subseteq C^\infty_{(a)}(\,U(Det)\,)$. Since $C^\infty_{(a)}(\,U(Det)\,)$ is clearly included in $C^\infty(\,U(Det)\,)(a)$, we have the equality $C^\infty(\,U(Det)\,)(a) = C^\infty_{(a)}(\,U(Det)\,)$, and hence

$$C^\infty(\,U(Det)\,) \cong \widehat{\bigoplus_{a\in\mathbb{Z}}} C^\infty_{(a)}(\,U(Det)\,).$$

The Hodge-Laplacian Δ given by Ω_{G_1} on $C^\infty(\,U(Det)\,)$ preserves the subspace $C^\infty_{(a)}(\,U(Det)\,) \cong \Gamma^\infty(\,G_1/K_1\,,\,Det^{\otimes a}\,)$, where it corresponds to the operator $\mathcal{D}_a := \nabla_a{}^*\nabla_a + \frac{n\,m\,a^2}{2(n+m)^2}$. We therefore get the relation

$$Spec_{\Delta}\,(\,C^\infty(\,U(Det)\,)\,) = \bigcup_{a\in\mathbb{Z}} Spec_{\mathcal{D}_a}\,(\,\Gamma^\infty(\,G_1/K_1\,,\,Det^{\otimes a}\,)\,).$$

Appendix

Let d be a positive integer. A **partition** of d is a sequence $\lambda = (\lambda_1,...,\lambda_k)$ of integers such that $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_k \geq 0$ and $\lambda_1 + \cdot\cdot + \lambda_k = d$. We denote this by $\lambda \vdash d$ and we identify λ with its Young diagram. The sequence $\lambda^{'} = (\lambda_1{}^{'},...,\lambda_l{}^{'})$ defined by letting $\lambda_j{}^{'}$ be the length of the j^{th} column of λ is called the **conjugate partition** of λ. If λ has at most n rows and m columns, then we shall write $\lambda \subseteq (\,m^n\,)$. For a partition $\lambda = (\lambda_1,...,\lambda_k)$, the space $S_\lambda(\mathbb{C}^k)$ will denote the unique (up to isomorphism) $U(k)$-module with highest weight λ.

The vector space $\mathbb{C}^n \otimes (\mathbb{C}^m)^*$ carries a natural $U(n)\times U(m)$ - representation. An exterior power of this representation is, in general, not irreducible. Its decomposition into $U(n)\times U(m)$ - irreducibles is described by the following classical result (see, e.g., Exercise 6.11$^*(b)$ and its solution in $[FH]$).

Lemma 13 *As a $U(n)\times U(m)$ - module, the d^{th} exterior power of $\mathbb{C}^n \otimes (\mathbb{C}^m)^*$ is isomorphic to*

$$\wedge^d(\mathbb{C}^n \otimes (\mathbb{C}^m)^*) \cong \bigoplus_{\substack{\lambda\vdash d \\ \lambda\subseteq(\,m^n\,)}} S_\lambda(\mathbb{C}^n) \otimes (\,S_{\lambda^{'}}(\mathbb{C}^m)\,)^*.$$

For $d = n\,m$, the unique partition λ of d satisfying $\lambda \subseteq (\,m^n\,)$ is

$$\lambda = (\lambda_1,...,\lambda_n) = (m,...,m).$$

Since the conjugate partition of λ is $\lambda^{'} = (\lambda_1{}^{'},...,\lambda_m{}^{'}) = (n,...,n)$, the above lemma shows that $\wedge^{n\,m}(\mathbb{C}^n \otimes (\mathbb{C}^m)^*)$ is an irreducible $U(n)\times U(m)$ - module with highest weight $\nu = (m,...,m)(-n,...,-n)$.

Acknowledgements

I would like to express my gratitude to Tilmann Wurzbacher for many extensive discussions and numerous suggestions during all stages of the preparation of this article.

References

[CFG] M. Cahen, M. Franc, S. Gutt, *Spectrum of the Dirac Operator on Complex Projective Space* $P_{2q-1}(\mathbb{C})$, Letters in Mathematical Physics, **18** (1989), 165-176.

[CG] M. Cahen, S. Gutt, *Spin Structures on Compact Simply Connected Riemannian Symmetric Spaces*, Simon Stevin, **62** (1988), 209-242.

[FH] W. Fulton, J. Harris, *Representation Theory*, Graduate texts in Math., Vol 192, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1991.

[Fr] T. Friedrich, *Dirac Operators in Riemannian Geometry*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2000.

[GW] R. Goodman, N. Wallach, *Representations and Invariants of the Classical Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[H] N. Hitchin, *Harmonic Spinors*, Advances In Mathematics, **14** (1974), 1-55.

[IT] A. Ikeda, Y. Taniguchi, *Spectra and Eigenforms of the Laplacian on* S^n *and* $P^n(\mathbb{C})$, Osaka J. Math., **15** (1978), 515-546.

[KN] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Volume I, Wiley-Interscience, New York, 1996.

[Kn] A.W. Knapp, *Lie Groups Beyond an Introduction - Second Edition*, Birkhäuser, Boston, 2002.

[Mic1] J. Mickelsson, *Labeling and Multiplicity Problem in the Reduction* $U(n+m) \downarrow U(n) \times U(m)$, J. Math Phy. **11** (1970), 2803-2806.

[Mic2] J. Mickelsson, *An Explicit Basis for the Reduction* $U(n+m) \downarrow U(n) \times U(m)$, J. Math Phy. **12** (1971), 2378-2382.

[W] N. Wallach, *Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces*, Marcel Dekker, New York, 1973.

Fuzzy complex Grassmannians, Berezin-Toeplitz quantization and truncations of differential operators

Abstract

We construct by representation-theoretic methods fuzzy versions of an arbitrary complex Grassmannian $M = Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$, i.e., a sequence of matrix algebras tending $SU(n+m)$-equivariantly to the algebra of smooth functions on M. We also show that this approximation can be interpreted in terms of the Berezin-Toeplitz quantization of M. Furthermore, we use branching rules and techniques from non-commutative geometry to construct certain fuzzy versions of natural differential operators acting on sections of "vector bundles over fuzzy Grassmannians", and to show that their spectra are truncations converging to the spectra of the corresponding "classical" (i.e., non fuzzy) differential operators.

Keywords: Fuzzy Grassmann manifold, Berezin-Toeplitz quantization, fuzzy Laplace operator, quantization of vector bundles.

Introduction

The idea of approximating the algebra $C^\infty(M)$ of complex-valued smooth functions on a manifold M by a sequence of matrix algebras $\mathcal{A}_N \cong \mathrm{Mat}\,(d_N\,,\mathbb{C})$ with $d_N \nearrow \infty$ appears naturally at least in two contexts.

First, in the Berezin-Toeplitz quantization of a compact Kähler manifold $(M\,,\omega)$ with integral Kähler form ω. Denoting the N-th power of the prequantization line bundle L (with first Chern form equal to ω) by $L^{\otimes N}$ and its holomorphic section module $\Gamma_{hol}(M\,, L^{\otimes N})$ by $\mathcal{H}_N$, the algebra $\mathcal{A}_N := End_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_N)$ is of course isomorphic to a matrix algebra. The Toeplitz quantization map $T_N : C^\infty(M) \longrightarrow \mathcal{A}_N$ is defined by associating to a function f multiplication of holomorphic sections of $L^{\otimes N}$ by f followed by projection on the space of holomorphic sections (compare $[CGR1,2]$ resp. $[BdMG]$ for geometric resp. analytic aspects of Toeplitz quantization). Work of several authors, culminating in a series of papers of Bordemann, Schlichenmaier and collaborators, shows that the sequence of matrix algebras $\big(\mathcal{A}_N\big)_{N\geq 1}$ converge, in a certain sense, to $C^\infty(M)$ (see e.g., $[BMS]$ and $[S]$).

Secondly, the goal of preserving symmetries in quantum theories with cut-offs, led to the consideration of "fuzzy manifolds" in theoretical physics. The name stems from the idea that given a periodic function $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e_k$ (with $e_k(x) = exp(2\pi ikx)$), developped as a Fourier series, the truncated sum $\sum_{|k|\leq N} a_k e_k$ gives a "fuzzy signal" (e.g., a fuzzy image in image transmission), but on the other hand the truncation is compatible with the S^1-action and is giving more and more accurate information upon letting N tend to infinity.

Going from S^1 to S^2 this concept becomes even more interesting. Identify S^2 with the homogeneous space $SU(2)/S(U(1)\times U(1))$ and recall that

$$L^2(S^2\,,\,\mathbb{C}) \cong \widehat{\bigoplus_{k\,\in\,\mathbb{N}}}\ V_{2\,k}\,,$$

where V_l is the space of homogeneous complex polynomials of degree l in two variables. Then, since

$$V_{_N}^* \otimes V_{_N} \cong \bigoplus_{k=0}^{N} V_{2\,k}$$

by auto-duality of the V_l and the usual Clebsch-Gordan rule, the algebra $\mathcal{A}_{_N} := End_{\mathbb{C}}(V_{_N}) \cong Mat(N+1,\mathbb{C})$ appears not only as a natural $SU(2)$-equivariant truncation of $L^2(S^2\,,\,\mathbb{C})$ (or $C^\infty(S^2)$) but carries a non-commutative multiplication as well. Starting with work of J. Madore and collaborators (see, e.g., $[M1], [M2]$), the non-commutative geometry of these matrix algebras $\mathcal{A}_{_N}$, approximating $C^\infty(S^2)$, was developped in some detail with the goal of getting finite results in quantum (field) theory without using renormalization theory methods (compare, e.g., $[GKP]$).

In this article we use representation theory, and more precisely knowledge of branching rules from $SU(n+m)$ to $S(U(n)\times U(m))$ obtained in $[BH]$, to give a simple and short proof of the fact that a complex Grassmannian M allows for an approximation of its function algebra $C^\infty(M)$ by matrix algebras $\mathcal{A}_{_N}$, and we identify these algebras $\mathcal{A}_{_N}$ with the endomorphism algebras naturally arising in the Berezin-Toeplitz quantization of M as a compact Kähler manifold. Furthermore, we employ the above mentioned branching rules to truncate section spaces of complex line and vector bundles over complex projective spaces and Grassmannians, in order to define then fuzzy versions of certain natural invariant differential operators as Laplacians, Dirac operators and Bochner-Laplacians.

Let us now describe the content of this article in some more detail. In Section 1, we generalize and simplify the above description of the fuzzy 2-sphere ($S^2 \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$), analogous results of H. Grosse and A. Strohmaier for $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ (see $[GS]$) and similar, independently obtained results of B.P. Dolan and co-workers (see $[BDLMO]$ and $[DO]$) on projective spaces and Grassmannians. We obtain by purely representation-theoretic methods that all complex Grassmannians $M = Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$ allow for a sequence of linear subspaces $\big(\mathcal{E}_{_N}\big)_{_{N\geq 1}}$ in their function algebra $C^\infty(M)$ such that $\mathcal{E}_{_N} \nearrow C^\infty(M)$ and $\mathcal{E}_{_N}$ is isomorphic to a matrix algebra $\mathcal{A}_{_N}$. In Section 2, we recall very briefly the Berezin-Toepliz quantization procedure (à la $[CGR1,2]$ and $[BMS]$) and prove that $\mathcal{E}_{_N}$ is in fact naturally identified with $End_{\mathbb{C}}(\Gamma_{hol}(M\,,\,L^{\otimes N}))$ via the Toeplitz quantization map $T_{_N}$. Let us note that this result does note come from general properties of $T_{_N}$ but needs some arguments from representation theory. Using now the convergence results of $[BMS]$ we can easily explain in which sense the sequence of algebras $(\mathcal{A}_N)_{N\geq 1}$ converges to the commutative algebra $C^\infty(M)$. In Section 3, we adopt the Dubois-Violette definition of differential forms on associative algebras (see $[D\text{-}V]$) that yields spaces of p-forms over the matrix algebra $\mathcal{A}_N$, denoted by $\Omega^p(\mathcal{A}_N)$ (compare also $[D\text{-}VKM]$ for the foundations of non-commutative geometry of matrix algebras). We construct for all $p \in \mathbb{N}$ a "fuzzy Laplace operator" Δ_N^p on $\Omega^p(\mathcal{A}_N)$, the N-th term of the fuzzy approximation sequence of $\Omega^p(M)$, the space of p-forms on $M = Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$, for arbitrary $n,\, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. It turns out that Δ_N^p is compatible with a certain natural equivariant "higher order Toeplitz quantization map" T_N^p and that, for fixed p, the spectrum of Δ_N^p tends to the spectrum of the usual Laplacian Δ^p on $\Omega^p(M)$ when N goes to infinity. Let us remark that apparently the only hitherto known case was the fuzzy Laplacian on functions on $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, i.e., the operator Δ_N^0 on $\Omega^0(\mathcal{A}_N)$ where $\mathcal{A}_N$ approximates $C^\infty(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ (see Theorem 4.1 in $[GS]$). In Section 4, we consider the "$SU(n+1)$-equivariant quantization" of the spinor bundle $S \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ in the sense of E. Hawkins (see $[Ha]$). This quantization is given by a sequence of $\mathcal{A}_N$-modules ($\mathcal{A}_N = End_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_N)$, $\mathcal{H}_N = \Gamma_{hol}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})\,,\, L^{\otimes N})$ and L the prequantization bundle as above), noted $\mathcal{M}_N^S$, that converge in a certain sense, to the $C^\infty(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$-module $\Gamma^\infty(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})\,,\, S)$. Using the branching rule from $SU(n+1)$ to $S(U(n) \times U(1))$ and the Littlewood-Richardson theorem, we show here that $\mathcal{M}_N^S$ is $SU(n+1)$-equivariantly isomorphic to a truncation of $L^2(M\,,\, S)$. As a corollary we obtain that there is a natural fuzzy Dirac opertor D_N on $\mathcal{M}_N^S$ whose spectrum is a truncation of the spectrum of the Dirac operator D on $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. In Section 5, we first decompose the space $L^2(M\,,\, L^{\otimes k})$ of L^2-sections of the k-th power of L, the dual of the determinant bundle over $M = Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$. Using some combinatorial analysis, proved in $[BH]$, we show - anlogously to the results in Section 4 - that the $SU(n+m)$-equivariant quantization $\mathcal{M}_N^{L^{\otimes k}}$ of $L^{\otimes k} \longrightarrow M$ is in fact isomorphic to a truncation of $L^2(M\,,\, L^{\otimes k})$, and we obtain then also a fuzzy Bochner-Laplacian $(\nabla_k^* \nabla_k)_N$ acting on $\mathcal{M}_N^{L^{\otimes k}}$ whose spectrum tend to the spectrum of the Bochner-Laplacian $\nabla_k^* \nabla_k$ on L^2-sections of $L^{\otimes k}$.

1 Fuzzy Grassmannians

In this section, we shall give an elementary proof of the fact that the algebra of complex smooth functions on a complex Grassmann manifold $Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$ can, in a certain sense, be approximated by a sequence of matrix algebras.

As a Riemannian symmetric space, $Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$ is diffeomorphic to $M = G/K$ with $G = SU(n+m)$ and $K = S(U(n) \times U(m))$. We assume without loss of generality $n \geq m$ and we fix the metric induced by the Killing form on M.

Let $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_{n+m-1})$ be a dominant integral form of $SU(n+m)$, i.e., $\lambda_1, ..., \lambda_{n+m-1}$ are integers satisfying $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_{n+m-1} \geq 0$. We shall denote by V_λ the unique (up to isomorphism) $SU(n+m)$-module with highest weight λ. Let us recall the following result (see, e.g., $[BH]$) :

Proposition 1 *As $SU(n+m)$-modules, we have*

(1) *for* $m = 1$,

$$L^2(M) \cong \begin{cases} \widehat{\bigoplus\limits_{b_1 \geq 0}} V_{(\,2\,b_1\,,\,b_1\,,\ldots,\,b_1\,)} & \textit{if } n \geq 2, \\ \\ \widehat{\bigoplus\limits_{b_1 \geq 0}} V_{(\,2\,b_1\,)} & \textit{if } n = 1; \end{cases}$$

(2) *for* $m \geq 2$, $L^2(M) \cong$

$$\begin{cases} \widehat{\bigoplus\limits_{b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_m \geq 0}} V_{(\,2\,b_1\,,\,b_1+b_2\,,\ldots,\,b_1+b_m\,,\,b_1\,,\ldots,\,b_1\,,\,b_1-b_m\,,\ldots,\,b_1-b_2\,)} & \textit{if } n \geq m+1, \\ \\ \widehat{\bigoplus\limits_{b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_m \geq 0}} V_{(\,2\,b_1\,,\,b_1+b_2\,,\ldots,\,b_1+b_m\,,\,b_1-b_m\,,\ldots,\,b_1-b_2\,)} & \textit{if } n = m. \end{cases}$$

Let $Det := \big\{(E\,,\,v) \in Gr_n(\mathbb{C}^{n+m}) \times \bigwedge^n(\mathbb{C}^{n+m})\ ;\ v \in \bigwedge^n(E)\big\}$ be the determinant line bundle over the Grassmanniann $Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$, and denote by L its dual bundle. As homogeneous vector bundles over M, we have the isomorphism $Det \cong G \times_{K\,,\,\rho} \mathbb{C}$ where ρ is the irreducible K-representation given by

$$\rho\left(\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}\right) = det(k_1).$$

Let $\mathcal{H}_{_N} = \Gamma_{\mathrm{hol}}\,(M\,,\,L^{\otimes N})$ $(N \in \mathbb{N}^*)$ be the finite-dimensional Hilbert space of holomorphic sections of the bundle $L^{\otimes N}$. By the Borel-Weil theorem (see, e.g., $[A]$), we have the following isomorphism of $SU(n+m)$-modules $\mathcal{H}_{_N} \cong V_{N\mu}$ where

$$\mu = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n}, 0, \ldots, 0).$$

The algebra $\mathcal{A}_{_N} := End_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_{_N})$ admits a natural $SU(n+m)$-action and can be identified with the matrix algebra $\mathrm{Mat}\,(dim_{\mathbb{C}}\,V_{N\mu}\,,\,\mathbb{C})$. Since $(V_{N\mu})^* \cong V_{N\nu}$ with

$$\nu = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{m}, 0, \ldots, 0),$$

one has the isomorphism of $SU(n+m)$-modules $\mathcal{A}_{_N} \cong V_{N\mu} \otimes V_{N\nu}$.

Let now $\tau_{_{\widetilde{\mu}}}$ and $\tau_{_{\widetilde{\nu}}}$ be two irreducible representations of $U(n+m)$ with highest weights

$$\widetilde{\mu} = (\underbrace{N, \ldots, N}_{n}, 0, \ldots, 0) \quad \text{and} \quad \widetilde{\nu} = (\underbrace{N, \ldots, N}_{m}, 0, \ldots, 0),$$

respectively. If $\tau_{\lambda'}$ denotes an arbitrary irreducible representation of $U(n+m)$ with highest weight λ', then one can prove (see, e.g., $[BH]$) that the multiplicity $m_{\,\tau_{_{\widetilde{\mu}}} \otimes \tau_{_{\widetilde{\nu}}}}(\tau_{\lambda'})$ is either 0 or 1, and $m_{\,\tau_{_{\widetilde{\mu}}} \otimes \tau_{_{\widetilde{\nu}}}}(\tau_{\lambda'}) = 1$ if and only if λ' is of the form

$$\lambda' = \begin{cases} (\,b_1 + N\,,\ldots,\,b_m + N\,,\,N\,,\ldots,\,N\,,\,N - b_m\,,\ldots,\,N - b_1\,) & \text{if } n \geq m+1, \\ (\,b_1 + N\,,\ldots,\,b_m + N\,,\,N - b_m\,,\ldots,\,N - b_1\,) & \text{if } n = m, \end{cases}$$

with $N \geq b_1 \geq b_2 \geq .... \geq b_m \geq 0$. It follows that

$$V_{N\mu} \otimes V_{N\nu} \cong \bigoplus_{\lambda} C^{\lambda}_{N\mu, N\nu} \, V_\lambda \, ,$$

where $C^{\lambda}_{N\mu,N\nu}$ equals 0 or 1, and $C^{\lambda}_{N\mu,N\nu} = 1$ if and only if

(i) for $m = 1$, λ is of the form

$$\lambda = \begin{cases} (\, 2\, b_1 \, , \, b_1 \, , ..., \, b_1 \,) & \text{if } n \geq 2, \\ (\, 2\, b_1 \,) & \text{if } n = 1, \end{cases}$$

with $N \geq b_1 \geq 0$;

(ii) for $m \geq 2$, λ is of the form

$$\lambda = \begin{cases} (\, 2\, b_1 \, , \, b_1 + b_2 \, , ..., \, b_1 + b_m \, , \, b_1 \, , ..., \, b_1 \, , \, b_1 - b_m \, , ..., \, b_1 - b_2 \,) & \text{if } n \geq m+1, \\ (\, 2\, b_1 \, , \, b_1 + b_2 \, , ..., \, b_1 + b_m \, , \, b_1 - b_m \, , ..., \, b_1 - b_2 \,) & \text{if } n = m, \end{cases}$$

with $N \geq b_1 \geq b_2 \geq .... \geq b_m \geq 0$.

Let $I = \big\{ b = (b_1, ..., b_m) \in \mathbb{N}^m \, ; \; b_1 \geq ... \geq b_m \big\}$ and let, for $N \in \mathbb{N}^*$, $I_N = \big\{ b = (b_1, ..., b_m) \in I \, ; \; N \geq b_1 \big\}$. We fix $b \in I$ and set

(1) for $m = 1$,

$$W(b) = \begin{cases} V_{(2\, b_1 \, , \, b_1 \, , ..., \, b_1)} & \text{if } n \geq 2, \\ V_{(2\, b_1)} & \text{if } n = 1; \end{cases}$$

(2) for $m \geq 2$,

$$W(b) = \begin{cases} V_{(2\, b_1 \, , \, b_1 + b_2 \, , .., \, b_1 + b_m \, , \, b_1 \, , ..., \, b_1 \, , \, b_1 - b_m \, , ..., \, b_1 - b_2)} & \text{if } n \geq m+1, \\ V_{(2\, b_1 \, , \, b_1 + b_2 \, , .., \, b_1 + b_m \, , \, b_1 - b_m \, , ..., \, b_1 - b_2)} & \text{if } n = m. \end{cases}$$

We shall denote by $\mathcal{E}_N$ the unique subspace of $L^2(M)$ which is, as a $SU(n+m)$-module, isomorphic to $\bigoplus_{b \in I_N} W(b)$. Note that we have proved the following proposition:

Proposition 2 *As $SU(n+m)$-modules, $\mathcal{A}_N \cong \mathcal{E}_N$.*

Remark. Let us underline that this purely representation-theoretic proposition singles out subspaces $\mathcal{E}_N \subset C^\infty(M)$ $(\subset L^2(M))$ that are isomorphic to matrix algebras. This sharpens general procedures giving surjective maps from $C^\infty(M)$ to matrix algebras (see the following section).

2 Berezin-Toeplitz quantization of Grassmannians

We continue to use the notations of the first section and recall parts of the theory of the so-called "Berezin-Toeplitz quantization", as developped, e.g., in $[CGR1]$

and $[BMS]$. We show here that - in the case of M a complex Grassmannian - the Toeplitz quantization map T_N, restricted to the subspace $\mathcal{E}_N \subset C^\infty(M)$, is an isomorphism onto the algebra $\mathcal{A}_N$.

Let $L^2(M\,,\,L^{\otimes N})$ be the Hilbert space of square integrable sections of the bundle $L^{\otimes N}$. Let Π_N denote the orthogonal projection onto the subspace $\mathcal{H}_N \subset L^2(M\,,\,L^{\otimes N})$. Given a function f in $C^\infty(M)$, one can define an operator on the space $\mathcal{H}_N$ by $T_N(f) := \Pi_N \circ M_f$ where M_f is the multiplication operator associated to f. The corresponding map $T_N : C^\infty(M) \longrightarrow End_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_N) = \mathcal{A}_N$ is called the **Toeplitz quantization map**.

Let $\psi^{N\mu} \in V_{N\mu}$ be a normalized highest weight vector with weight $N\mu$. Let $\widetilde{P}_N : V_{N\mu} \longrightarrow V_{N\mu}$ be the orthogonal projector given by

$$\widetilde{P}_N(\psi) = \langle\, \psi\,,\, \psi^{N\mu}\,\rangle_{V_{N\mu}}\, \psi^{N\mu}\,.$$

Denote by π the irreducible unitary representation which corresponds to the G-module $V_{N\mu}$. One easily verifies that $\pi(g)\,\widetilde{P}_N\,\pi(g)^{-1}$ is the projector onto the "coherent state" associated to $x = gK \in M$ (compare $[CGR2]$). Thus the coherent state map used in the Berezin-Toeplitz quantization of Kähler manifolds (see $[CGR1]$) is here equal to

$$\begin{array}{rccc} P_N : & M = G/K & \longrightarrow & End_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_N) \\ & gK & \longmapsto & \pi(g)\,\widetilde{P}_N\,\pi(g)^{-1} \end{array}$$

(we switch notations from $V_{N\mu}$ to $\mathcal{H}_N$ in "geometric contexts", i.e., when we want to think in term of the "quantization of the manifold M". Of course $\mathcal{H}_N \cong V_{N\mu}$). If π^* is the representation dual to π and $(\psi^{N\mu})^*(\psi) := \langle\, \psi\,,\, \psi^{N\mu}\,\rangle_{V_{N\mu}}$ for $\psi \in V_{N\mu}$, then we have

$$P_N(gK) = (\pi \otimes \pi^*)(g)(\psi^{N\mu} \otimes (\psi^{N\mu})^*)$$

for all $g \in G$. Setting $\rho = \pi \otimes \pi^*$ and $\varphi^{N\mu} = \psi^{N\mu} \otimes (\psi^{N\mu})^*$, one simply writes

$$P_N(gK) = \rho(g)\varphi^{N\mu}$$

for all $g \in G$.

Let $\varepsilon^{(N)}$ be the "ε-function" of Rawnsley ($[R]$) of the bundle $L^{\otimes N}$. Since the G-action lifts to the total space $L^{\otimes N}$, this function is of course constant. Furthermore,

$$\varepsilon^{(N)} = \frac{dim_{\mathbb{C}}\mathcal{H}_N}{(vol\,M)N^d}$$

with $d = dim_{\mathbb{C}}M$, as shown in $[CGR1]$. Normalizing the volume to one, the proof of Proposition 3.1 of $[S]$ now yields the following expression for the Toeplitz quantization map

$$T_N(f) = (dim_{\mathbb{C}}\mathcal{H}_N)\int_M f(x)P_N(x)\,d\,\Omega(x)\,,$$

where Ω is the normalized G-invariant measure associated to the metric on M. From this expression, it follows that the map T_N is G-equivariant.

Let the map $\sigma_N : \mathcal{A}_N \longrightarrow C^\infty(M)$ be defined by

$$\sigma_N(A)(x) = Tr(AP_N(x))$$

for $A \in \mathcal{A}_N$ and $x \in M$. The function $\sigma_N(A)$ is called the **covariant Berezin symbol** of the operator $A \in \mathcal{A}_N$.

Lemma 1 *For $A \in \mathcal{A}_N$, one has*

(1) $\sigma_N(A) \in \mathcal{E}_N$;

(2) $T_N(\sigma_N(A)) = A$.

Proof. Let us first prove point (1). Recall that

$$L^2(M) \cong \widehat{\bigoplus_{b\in I}} W(b) \otimes (W(b)^*)^K$$

with $dim_{\mathbb{C}}(W(b)^*)^K = 1$. Then there exists a unique (up to a phase) normalized vector $w_b^K \in W(b)$ such that $\pi^b(k)w_b^K = w_b^K$ for all $k \in K$, where π^b denotes the irreducible unitary representation corresponding to the G-module $W(b)$. We set

$$L_b = (w_b^K)^* := \langle\, . \,,\, w_b^K \rangle_{W(b)}.$$

For every $v_b \in W(b)$, one associates a function $f_{v_b} \in C^\infty(M)$ defined by $f_{v_b}(gK) := L_b(\pi^b(g)^{-1}v_b)$ for $g \in G$. On $\mathcal{A}_N$, we consider the scalar product given by

$$\langle A \,,\, B \rangle_{\mathcal{A}_N} = \frac{1}{dim_{\mathbb{C}}\mathcal{H}_N}\ Tr(AB^*).$$

It follows that

$$\sigma_N(A)(x) = (dim_{\mathbb{C}}\mathcal{H}_N)\,\langle A \,,\, P_N(x) \rangle_{\mathcal{A}_N}$$

for all $A \in \mathcal{A}_N, x \in M$. Take an element $l \in I \setminus I_N$ and let $A \in \mathcal{A}_N$. We have

$$\begin{aligned}
\langle f_{v_l} \,,\, \sigma_N(A) \rangle_{L^2(M)} &= \int_M f_{v_l}(x)\,\overline{\sigma_N(A)(x)}\, d\,\Omega(x) \\
&= (dim_{\mathbb{C}}\mathcal{H}_N)\int_G \overline{\langle \pi^l(g)w_l^K \,,\, v_l \rangle}_{W(l)}\ \langle \rho(g)\varphi^{N\mu} \,,\, A \rangle_{\mathcal{A}_N}\, dg.
\end{aligned}$$

Since $\rho \cong \bigoplus_{b\in I_N} \pi^b$ by Proposition 2, the orthogonality relations for the compact Lie group G (see, e.g., $[Kn]$) imply that $\langle f_{v_l} \,,\, \sigma_N(A) \rangle_{L^2(M)} = 0$. This shows that $\sigma_N(A) \in \mathcal{E}_N$.

Now, to prove point (2), we fix $A, B \in \mathcal{A}_N$. Observe that

$$\begin{aligned}
\langle T_N(\sigma_N(A)) \,,\, B \rangle_{\mathcal{A}_N} &= (dim_{\mathbb{C}}\mathcal{H}_N)^2 \int_M \langle A \,,\, P_N(x) \rangle_{\mathcal{A}_N}\ \langle P_N(x) \,,\, B \rangle_{\mathcal{A}_N}\, d\,\Omega(x) \\
&= (dim_{\mathbb{C}}\mathcal{H}_N)^2 \int_G \langle \rho(g)\varphi^{N\mu} \,,\, B \rangle_{\mathcal{A}_N}\ \overline{\langle \rho(g)\varphi^{N\mu} \,,\, A \rangle}_{\mathcal{A}_N}\, dg \\
&= (dim_{\mathbb{C}}\mathcal{H}_N)^2\ \frac{\overline{\langle B \,,\, A \rangle}_{\mathcal{A}_N}}{(dim_{\mathbb{C}}\mathcal{H}_N)^2} \\
&= \langle A \,,\, B \rangle_{\mathcal{A}_N}.
\end{aligned}$$

Thus we deduce that $T_N(\sigma_N(A)) = A$ for all $A \in \mathcal{A}_N$, which completes the proof. $\square$

Consequently, the linear map $t_N := T_N\big|_{\mathcal{E}_N}$ is surjective and hence bijective. Moreover, one has $(t_N)^{-1} = \sigma_N$.

Remarks. (a) Let $f = \sum_{b\in I} f_{v_b}$ be in $C^\infty(M)$ with $v_b \in W(b)$ for all $b \in I$, and let $f_N := \sum_{b\in I_N} f_{v_b}$. Assume that there exists $l \in I \setminus I_N$. Then we have for $x = gK$

$$\begin{aligned}
\sigma_N(T_N(f_{v_l}))(x) &= (dim_{\mathbb{C}}\mathcal{H}_N) \int_M f_{v_l}(y)\, Tr(\, P_N(y)\, P_N(x))\, d\,\Omega(y) \\
&= (dim_{\mathbb{C}}\mathcal{H}_N)^2 \int_M f_{v_l}(y)\, \langle\, P_N(y)\,,\, P_N(x)\,\rangle_{\mathcal{A}_N}\, d\,\Omega(y) \\
&= (dim_{\mathbb{C}}\mathcal{H}_N)^2 \int_G \overline{\langle\, \pi^{\,l}(g^{\,\prime})w_l^K\,,\, v_l\,\rangle}_{W(l)}\ \langle\, \rho(g^{\,\prime})\varphi^{N\mu}\,,\, \rho(g)\varphi^{N\mu}\,\rangle_{\mathcal{A}_N}\, dg^{\,\prime} \\
&= 0
\end{aligned}$$

because $\rho \cong \bigoplus_{b\in I_N} \pi^{\,b}$. We conclude that $\sigma_N(T_N(f)) = f_N$.

(b) Let $\{\psi_i\}$ be an orthonormal basis of $\mathcal{H}_N$ such that $\psi^{N\mu} \in \{\psi_i\}$. For a fixed $g \in G$, we set $\varphi_i = \pi(g)\psi_i$. Then we have with $x = gK$

$$\begin{aligned}
\sigma_N(A)(x) = Tr(AP_N(gK)) &= Tr(P_N(gK)A) \\
&= \sum_i \langle\, A\,\varphi_i\,,\, P_N(gK)\varphi_i\,\rangle \\
&= \sum_i \langle\, \pi(g)^{-1}A\,\varphi_i\,,\, \widetilde{P}_N\, \pi(g)^{-1}\varphi_i\,\rangle \\
&= \sum_i \langle\, \pi(g)^{-1}A\,\pi(g)\,\psi_i\,,\, \widetilde{P}_N\,\psi_i\,\rangle \\
&= \langle\, \pi(g)^{-1}A\,\pi(g)\,\psi^{N\mu}\,,\, \psi^{N\mu}\,\rangle \\
&= \langle\, A\,\pi(g)\,\psi^{N\mu}\,,\, \pi(g)\,\psi^{N\mu}\,\rangle
\end{aligned}$$

for all $A \in \mathcal{A}_N$. It follows that

$$\begin{aligned}
\|(t_N)^{-1}(A)\|_\infty = \|\sigma_N(A)\|_\infty &= \operatorname{Sup}_{g\in G} \big|\, Tr(AP_N(gK))\,\big| \\
&\le \|A\|_{op}
\end{aligned}$$

for all $A \in \mathcal{A}_N$, where $\|\ \|_{op}$ is the operator norm on $End_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_N)$.

Proposition 3 *For $f,\, h \in C^\infty(M)$, we have*

(1) $\|\,(t_N)^{-1}(T_N(f)) - f\,\|_\infty \longrightarrow 0$ *as* $N \to \infty$;

(2) $\|\,(t_N)^{-1}(T_N(f)\,T_N(h)) - fh\,\|_\infty \longrightarrow 0$ *as* $N \to \infty$.

Proof. By Remark (a) above, we have

$$\|\,(t_N)^{-1}(T_N(f)) - f\,\|_\infty = \|\,f_N - f\,\|_\infty.$$

Together with a standard C^0-version of the theorem of Peter and Weyl (see, e.g., $[Wa]$), this yields the result of point (1). To prove the second point of the lemma, we first note that

$$\begin{aligned} \| (t_{_N})^{-1}(T_{_N}(f)\, T_{_N}(h)) - fh \|_\infty \quad &\leq \quad \| (t_{_N})^{-1}(T_{_N}(f)\, T_{_N}(h) - T_{_N}(fh)) \|_\infty + \\ & \qquad \| (t_{_N})^{-1}(T_{_N}(fh)) - fh \|_\infty . \end{aligned}$$

Using Remark (b), we get

$$\| (t_{_N})^{-1}(T_{_N}(f)\, T_{_N}(h) - T_{_N}(fh)) \|_\infty \leq \| T_{_N}(f)\, T_{_N}(h) - T_{_N}(fh) \|_{op} .$$

As shown by Bordemann, Meinrenken and Schlichenmaier (see $[BMS]$), one has

$$\| T_{_N}(f)\, T_{_N}(h) - T_{_N}(fh) \|_{op} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Thus point (2) follows, since of course $\| (t_{_N})^{-1}(T_{_N}(fh)) - fh \|_\infty \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$ by point (1). $\square$

Remark. Let $f = \sum_{b\in I} f_{v_b}$ and $h = \sum_{b\in I} h_{v_b'}$ be in $C^\infty(M)$, where $v_{_b}, v_{_b}' \in W(b)$ for all $b \in I$. Let $f_{_N} = \sum_{b\in I_N} f_{v_b}$ and $h_{_N} = \sum_{b\in I_N} h_{v_b'}$. If we set

$$f_{_N} \star_N h_{_N} = (t_{_N})^{-1}(T_{_N}(f)\, T_{_N}(h)),$$

then we immediately obtain that

$$\| f_{_N} \star_N h_{_N} - fh \|_\infty \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

i.e., we have a (non-commutative) multiplication $(f\, ,\, h) \longmapsto f_{_N} \star_N h_{_N}$ that tends to the commutative product fh as $N \to \infty$.

3 The fuzzy Laplace operator on differential forms

In this section, we shall adopt the Dubois-Violette definition of differential forms on the algebras $\mathcal{A}_{_N}$ (see $[D\text{-}V]$). Then we will construct a noncommutative analog of the Laplace operator acting on the space of differential forms on $M = Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$, whose spectrum is a "truncation" of the spectrum of the usual Laplacian on forms. It turns out that the noncommutative exterior derivative $d_{_N}$ on $\mathcal{A}_{_N}$ is interwined with the usual de Rham derivative on functions on the Grassmannian via natural higher order Toeplitz quantization maps.

Let us set $\mathcal{E}^p_{_N} := Span\big\{ f_0\, df_1 \wedge ... \wedge df_p\, ;\ f_0, ..., f_p \in \mathcal{E}_{_N} \big\}$ for $p \geq 1$, and $\mathcal{E}^0_{_N} := \mathcal{E}_{_N}$. By definition of the form $\omega = f_0\, df_1 \wedge ... \wedge df_p \in \mathcal{E}^p_{_N} \subset \Omega^p(M)$, one has

$$\omega(X_1, ..., X_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma\in S_p} \varepsilon(\sigma)\, f_0\, (df_1)(X_{\sigma(1)}) ... (df_p)(X_{\sigma(p)})$$

for $X_1, ..., X_p$ vector fields on M. The differential of ω is given by the formula

$$d\omega = df_0 \wedge df_1 \wedge ... \wedge df_p .$$

Next we will define the space of differential forms $\Omega^*(\mathcal{A}_{_N})$ on $\mathcal{A}_{_N}$ in analogy with the commutative case. First, we set $\Omega^0(\mathcal{A}_{_N})$ to be equal to $\mathcal{A}_{_N}$. The differential $d_{_N} a$ of an arbitrary element $a \in \mathcal{A}_{_N}$ is defined by

$$(d_{_N} a)(X) = X(a)$$

for each derivation $X \in \mathcal{D}er(\mathcal{A}_{_N})$. To $a_0, ..., a_p \in \mathcal{A}_{_N}$, one associates a skew-symmetric multilinear map

$$\alpha = a_0 \, d_{_N} a_1 ... d_{_N} a_p : \underbrace{\mathcal{D}er(\mathcal{A}_{_N}) \otimes ... \otimes \mathcal{D}er(\mathcal{A}_{_N})}_{p} \longrightarrow \mathcal{A}_{_N}$$

given by

$$\alpha(X_1, ..., X_p) = \frac{1}{p\,!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma)\, a_0 \,(d_{_N} a_1)(X_{\sigma(1)}) ... \,(d_{_N} a_p)(X_{\sigma(p)})$$

for $X_1, ..., X_p \in \mathcal{D}er(\mathcal{A}_{_N})$ (compare [*D-VKM*] for this "derivation-based" non commutative differential calculus). Such a map α is, by definition, a p-form on $\mathcal{A}_{_N}$. More generally, for $p \geq 1$, we set

$$\Omega^p(\mathcal{A}_{_N}) := Span\big\{a_0 \, d_{_N} a_1 ... \, d_{_N} a_p \,;\; a_0, ..., a_p \in \mathcal{A}_{_N}\big\}.$$

The exterior derivative of a p-form is a $(p+1)$-form, given as in commutative geometry by the formula

$$d_{_N}(a_0 \, d_{_N} a_1 ... \, d_{_N} a_p) = d_{_N} a_0 \, d_{_N} a_1 ... \, d_{_N} a_p \,.$$

Now we define for $p \geq 1$ a "higher order Toeplitz quantization map" $T^p_{_N} : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^p(\mathcal{A}_{_N})$ by

$$T^p_{_N}(f_0 \, df_1 \wedge ... \wedge df_p) = T_{_N}(f_0) \, d_{_N} T_{_N}(f_1) ... \, d_{_N} T_{_N}(f_p)$$

for $f_0, ..., f_p \in C^\infty(M)$. Furthermore, we set $T^0_{_N} := T_{_N}$. Note that the restricted map $t^p_{_N} := T^p_{_N}\Big|_{\mathcal{E}^p_{_N}} : \mathcal{E}^p_{_N} \longrightarrow \Omega^p(\mathcal{A}_{_N})$ is a G-equivariant isomorphism, and that

$$d_{_N} \circ T^p_{_N} = T^p_{_N} \circ d \,,$$

showing that the intrinsically defined differential calculus on $\mathcal{A}_{_N}$ matches with the de Rham calculus on smooth functions.

From this fact, we obtain a G-invariant scalar product on $\Omega^p(\mathcal{A}_{_N})$ given by

$$(\, \alpha \,,\, \beta \,)_{\Omega^p(\mathcal{A}_{_N})} := \langle\, (t^p_{_N})^{-1} \alpha \,,\, (t^p_{_N})^{-1} \beta \,\rangle_{\Omega^p(M)}$$

for $\alpha, \beta \in \Omega^p(\mathcal{A}_{_N})$, where $\langle \;,\; \rangle_{\Omega^p(M)}$ is the usual L^2-inner product on p-forms.

Lemma 2 *The exterior derivative $d : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p+1}(M)$ satisfies*

$$d(\mathcal{E}^p_{_N}) \subset \mathcal{E}^{p+1}_{_N} \quad \textit{and} \quad d^*(\mathcal{E}^{p+1}_{_N}) \subset \mathcal{E}^p_{_N} \,.$$

Proof. Obviously, $d(\mathcal{E}^p_{_N}) \subset \mathcal{E}^{p+1}_{_N}$. Let $\alpha = f_0\, df_1 \wedge ... \wedge df_{p+1}$ be in $\mathcal{E}^{p+1}_{_N}$ and let $\beta = h_0\, dh_1 \wedge ... \wedge dh_p$ be in $\Omega^p(M)$. Suppose that there exists $h_{j_0} \in \mathcal{E}^{\perp}_{_N}$ (with respect to the standard L^2-structure on $C^\infty(M)$) with $0 \leq j_0 \leq p$. We have

$$\begin{aligned}\langle\, d^*\alpha\,,\,\beta\,\rangle_{\Omega^p(M)} &= \langle\,\alpha\,,\, d\,\beta\,\rangle_{\Omega^{p+1}(M)} \\ &= \int_M f_0(x)\,\langle\, df_1 \wedge ... \wedge df_{p+1}\,,\, dh_0 \wedge dh_1 \wedge ... \wedge dh_p\,\rangle_x\; d\,\Omega(x).\end{aligned}$$

For $1 \leq i \leq p+1$, we observe that

$$\begin{aligned}\langle\, df_i\,,\, dh_{j_0}\,\rangle &= \langle\, d^*df_i\,,\, h_{j_0}\,\rangle \\ &= \langle\,\Delta f_i\,,\, h_{j_0}\,\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

since $\Delta f_i \in \mathcal{E}_{_N}$. It follows that for all $x \in M$,

$$\langle\, df_1 \wedge ... \wedge df_{p+1}\,,\, dh_0 \wedge dh_1 \wedge ... \wedge dh_p\,\rangle_x = 0$$

and hence $\langle\, d^*\alpha\,,\,\beta\,\rangle_{\Omega^p(M)} = 0$. This shows that $d^*(\mathcal{E}^{p+1}_{_N}) \subset (\mathcal{E}^p_{_N})^{\perp\perp} = \mathcal{E}^p_{_N}$. $\square$

Let us denote in the following $d^{\,p} = d\big|_{\Omega^p(M)}$ and $\Delta^p := d^{\,p-1}(d^{\,p-1})^* + (d^{\,p})^* d^{\,p}$, as well as

$$d^{\,p}_{_N} \;:=\; d_{_N}\big|_{\Omega^p(\mathcal{A}_{_N})} : \Omega^p(\mathcal{A}_{_N}) \longrightarrow \Omega^{p+1}(\mathcal{A}_{_N}).$$

Obviously, $d^{\,p}_{_N}$ is related to $d^{\,p}$ by the formula $d^{\,p}_{_N} = t^{p+1}_{_N} \circ d^{\,p} \circ (t^p_{_N})^{-1}$.

Lemma 3 *The adjoint of the operator $d^{\,p}_{_N} : \Omega^p(\mathcal{A}_{_N}) \longrightarrow \Omega^{p+1}(\mathcal{A}_{_N})$ with respect to the scalar products $(\ ,\ )_{\Omega^p(\mathcal{A}_{_N})}$ and $(\ ,\ )_{\Omega^{p+1}(\mathcal{A}_{_N})}$ is*

$$(d^{\,p}_{_N})^* = t^p_{_N} \circ (d^{\,p})^* \circ (t^{p+1}_{_N})^{-1}.$$

Proof. Let α be in $\Omega^p(\mathcal{A}_{_N})$ and let β be in $\Omega^{p+1}(\mathcal{A}_{_N})$. We have

$$\begin{aligned}(\, d^{\,p}_{_N}\,\alpha\,,\,\beta\,)_{\Omega^{p+1}(\mathcal{A}_{_N})} &= \langle\,(t^{p+1}_{_N})^{-1}\, d^{\,p}_{_N}\,\alpha\,,\,(t^{p+1}_{_N})^{-1}\,\beta\,\rangle_{\Omega^{p+1}(M)} \\ &= \langle\, d^{\,p}(t^p_{_N})^{-1}\,\alpha\,,\,(t^{p+1}_{_N})^{-1}\,\beta\,\rangle_{\Omega^{p+1}(M)} \\ &= (\,\alpha\,,\, t^p_{_N}(d^{\,p})^*(t^{p+1}_{_N})^{-1}\,\beta\,)_{\Omega^p(\mathcal{A}_{_N})}.\end{aligned}$$

Thus we conclude that $(d^{\,p}_{_N})^* = t^p_{_N} \circ (d^{\,p})^* \circ (t^{p+1}_{_N})^{-1}$. $\square$

We define the **Laplace operator** on $\Omega^p(\mathcal{A}_{_N})$, $\Delta^p_{_N} : \Omega^p(\mathcal{A}_{_N}) \longrightarrow \Omega^p(\mathcal{A}_{_N})$ by

$$\Delta^p_{_N} := d^{\,p-1}_{_N}(d^{\,p-1}_{_N})^* + (d^{\,p}_{_N})^* d^{\,p}_{_N}.$$

Consequently, one easily proves:

Corollary 1 *We have the following relations:*

(1) $\Delta^p_{_N} = t^p_{_N} \circ \Delta^p \circ (t^p_{_N})^{-1}$;

(2) $Spec_{\,\Delta^p_{_N}}(\Omega^p(\mathcal{A}_{_N})) = Spec_{\left(\Delta^p|_{\mathcal{E}^p_{_N}}\right)}(\mathcal{E}^p_{_N})$.

Remark. In particular, for $p=0$, the relation (2) in the above corollary implies that the spectrum of the Laplace operator acting on $\mathcal{A}_N$ is the truncation of the spectrum of the "classical Laplace operator" acting on $C^\infty(M)$ given by cutting "higher" eigenvalues. Using a result in $[BH]$, one immediately obtains:

$Spec_{\Delta_N}(\mathcal{A}_N) = \big\{\lambda_b = \frac{1}{n+m}\sum_{j=1}^m b_j(b_j+n+m-2\,j+1)\,;\ b=(b_1,...,b_m)\in \mathbb{N}^m \text{ with } N\geq b_1\geq ...\geq b_m\geq 0\big\}.$

4 Truncations of the spinor fields and a fuzzy Dirac operator over complex projective spaces

The quantization of homogeneous vector bundles over compact coadjoint orbits is defined and studied in detail by E. Hawkins in $[Ha]$ in order to generalize the Toeplitz quantization of compact coadjoint orbits. We show here that for M a spin complex projective space and the spinor bundle $S\longrightarrow M$, this quantization is in fact given by a G-equivariant truncation of the space of its L^2-sections.

Let us consider the symmetric pair $(G\,,\,K)=(SU(n+1)\,,\,S(U(n)\times U(1))$ with $n>1$. Assume that n is odd. Then the complex projective space $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})\cong G/K$ admits a unique spin structure. Let S be the spinor bundle associated to the homogeneous spin structure of $M=G/K$. Since M is a Kähler spin manifold, one has the following isomorphism:

$$S\cong S_0\oplus ...\oplus S_n\,,$$

where S_n is a complex line bundle satisfying $S_n^2=\bigwedge^{n,0}M:=\bigwedge^{n,0}(T^*M\otimes\mathbb{C})$, and $S_{n-r}=\bigwedge^{0,r}M\otimes S_n$ for all $r\in\{0,...,n\}$ (see $[Fr]$ for details).

Recall that finite-dimensional irreducible representations of K are classified by their highest weights which are of the form $\eta=(\eta_1,...,\eta_n)$ with $\eta_j\in\mathbb{Z}$ for all $1\leq j\leq n$, and $\eta_1\geq ...\geq\eta_n$. Now, observe that $(S_n)_{eK}$ is an irreducible (one-dimensional!) K-module with highest weight

$$\eta=\big(\frac{n+1}{2},.....,\frac{n+1}{2}\big).$$

It follows that $(S_{n-r})_{eK}\cong(\bigwedge^{0,r}M)_{eK}\otimes(S_n)_{eK}$ is also an irreducible K-module whose highest weight μ_r is easily calculated from the observation that $(TM)_{eK}\cong(\mathbb{C}^n)^*\otimes\mathbb{C}$ as a $U(n)\otimes U(1)$-module:

$$\mu_r=\begin{cases}\big(\frac{n+1}{2}\,,.....,\frac{n+1}{2}\big) & \text{if } r=0,\\ \big(\underbrace{\frac{n+1}{2}-r,...,\frac{n+1}{2}-r}_{n-r},\frac{n-1}{2}-r\,,...,\,\frac{n-1}{2}-r\big) & \text{if } 1\leq r\leq n-1,\\ \big(-\frac{n+1}{2}\,,.....,-\frac{n+1}{2}\big) & \text{if } r=n.\end{cases}$$

See the Appendix of $[BH]$ or exercise $6.11^*(b)$ of $[FH]$ for a more general result implying the above formula (upon adapting from unitary to special unitary groups).

Applying the Peter-Weyl theorem and the branching rule from $SU(n+1)$ to $S(U(n)\times U(1))$, one gets (see, e.g., $[CFG]$, $[BH]$):

Proposition 4 *As $SU(n+1)$-modules, we have for* $0 \le r \le n$

$L^2(M\,,\,S_{n-r}) \cong$

$$\begin{cases} \widehat{\bigoplus\limits_{k\geq 0}} V_{\left(\frac{n+1}{2}+2k\,,\,\frac{n+1}{2}+k\,,\ldots\ldots,\,\frac{n+1}{2}+k\right)} & \text{if } r=0,\\ \widehat{\bigoplus\limits_{\substack{k\geq Sup\,\{\varepsilon\,,\,r-\frac{n-1}{2}\}\\ \varepsilon=0\,,\,1}}} V_{\left(\frac{n+1}{2}+2k-r-\varepsilon\,,\,\underbrace{\frac{n+1}{2}+k-r,\ldots,\frac{n+1}{2}+k-r}_{n-r-1},\ \frac{n-1}{2}+k-r+\varepsilon,\,\underbrace{\frac{n-1}{2}+k-r,\ldots,\frac{n-1}{2}+k-r}_{r-1}\right)} & \text{if } 1\le r\le n-1,\\ \widehat{\bigoplus\limits_{k\geq\frac{n+1}{2}}} V_{\left(-\frac{n+1}{2}+2k\,,\,-\frac{n+1}{2}+k\,,\ldots\ldots,\,-\frac{n+1}{2}+k\right)} & \text{if } r=n. \end{cases}$$

Let $\mathcal{H}_{N} = V_{N\mu}$ ($N > \frac{n+1}{2}$) be the irreducible G-module with highest weight $N\mu = (\,N, \ldots, N\,)$. For $0 \le r \le n$, we denote by $\mathcal{H}_{N}^{S_{n-r}}$ the irreducible G-module with highest weight

$$\Lambda_r^{'} = \begin{cases} \left(\,N-\frac{n+1}{2}\,,\ldots\ldots,\,N-\frac{n+1}{2}\,\right) & \text{if } r=0,\\ \left(\,N+r-\frac{n-1}{2}\,,\ldots,\,N+r-\frac{n-1}{2}\,,\,\underbrace{N+r-\frac{n+1}{2},\ldots,N+r-\frac{n+1}{2}}_{n-r}\right) & \text{if } 1\le r\le n-1,\\ \left(\,N+\frac{n+1}{2}\,,\ldots\ldots,\,N+\frac{n+1}{2}\,\right) & \text{if } r=n. \end{cases}$$

Note that $\left(\mathcal{H}_{N}^{S_{n-r}}\right)^* \cong V_{\Lambda_r}$ with

$$\Lambda_r = \begin{cases} \left(\,N-\frac{n+1}{2}, 0, \ldots\ldots, 0\,\right) & \text{if } r=0,\\ \left(\,N+r-\frac{n-1}{2}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-r}, 0, \ldots, 0\,\right) & \text{if } 1\le r\le n-1,\\ \left(\,N+\frac{n+1}{2}\,, 0, \ldots\ldots, 0\,\right) & \text{if } r=n. \end{cases}$$

Let us set $\mathcal{M}_{N}^{S_{n-r}} := Hom_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_{N}^{S_{n-r}}\,,\,\mathcal{H}_{N})$ for $0 \le r \le n$ and $\mathcal{M}_{N}^{S} := \bigoplus\limits_{r=0}^{n} \mathcal{M}_{N}^{S_{n-r}}$. Obviously, $\mathcal{M}_{N}^{S}$ is a finitely generated projective module over $\mathcal{A}_{N} = End_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_{N})$. The sequence $\left(\mathcal{M}_{N}^{S}\right)_N$ is equal to the "equivariant quantization of the vector bundle $S \longrightarrow M$" in the sense of E. Hawkins, i.e., the $\mathcal{A}_{N}$-module $\mathcal{M}_{N}^{S}$ tend - in a certain sense - to the $C^\infty(M)$-module $\Gamma^\infty(M\,,\,S)$ (see $[Ha]$ and notably Section 6 thereof for details).

Let $L^2(M\,,\,S)$ be the space of square integrable sections of the bundle S. Our main purpose in this section is to prove that the module $\mathcal{M}_{N}^{S}$ is, up to isomorphism, just a "G-equivariant truncated version" of $L^2(M\,,\,S)$, i.e., there is a unique G-submodule of $L^2(M\,,\,S)$ isomorphic to $\mathcal{M}_{N}^{S}$. This gives a simple and natural way of describing this "quantization" of the spinor bundle.

To do this, we first recall the following fact. Let $\tau_{\widetilde{\mu}}$ and $\tau_{\widetilde{\eta}}$ be irreducible polynomial representations of $U(n{+}1)$ with highest weights $\widetilde{\mu}$ and $\widetilde{\eta}$ respectively. Then,

$$(\star) \qquad \tau_{\widetilde{\mu}} \otimes \tau_{\widetilde{\eta}} \cong \bigoplus_{\widetilde{\lambda}} C_{\widetilde{\mu},\widetilde{\eta}}^{\widetilde{\lambda}}\, \tau_{\widetilde{\lambda}}\;,$$

where $\tau_{\widetilde{\lambda}}$ denotes an irreducible polynomial representation with highest weight $\widetilde{\lambda}$, and the multiplicity $C^{\widetilde{\lambda}}_{\widetilde{\mu},\widetilde{\eta}}$ is combinatorially determined by the Littlewood-Richardson theorem (see [Kn], Theorem 9.74).

Let us study the decomposition $(\star)$ in the following particular cases.

Case 1. Let $\widetilde{\mu} = (\,N - \frac{n+1}{2}, 0, ..., 0\,)\,(N > \frac{n+1}{2})$ and let $\widetilde{\eta} = (\,N, ..., N, 0\,)$. Applying the Littlewood-Richardson theorem to this case, we conclude that $\tau_{\widetilde{\lambda}}$ occurs in the decomposition $(\star)$ if and only if $\widetilde{\lambda}$ is of the form

$$\widetilde{\lambda} = \big(\,N + k, N, ..., N, N - \frac{n+1}{2} - k\,\big)$$

with $0 \leq k \leq N - \frac{n+1}{2}$. Consequently, we deduce that

$$\mathcal{M}^{S_n}_{N} \;\cong\; \mathcal{U}_{N} \;:=\; \bigoplus_{k=0}^{N-\frac{n+1}{2}} V_{\left(\frac{n+1}{2}+2k\,,\,\frac{n+1}{2}+k\,,.....,\,\frac{n+1}{2}+k\right)}\,.$$

Case 2. Let $\widetilde{\mu} = (\,N - a, \underbrace{1, .., 1}_{n-r}, 0, ..., 0\,)\,(N > \frac{n+1}{2})$ with $a := \frac{n-1}{2} - r$ and $1 \leq r \leq n-1$, and let $\widetilde{\eta} = (\,N, ..., N, 0\,)$. In this case, the Littlewood-Richardson rules imply that the coefficient $C^{\widetilde{\lambda}}_{\widetilde{\mu},\widetilde{\eta}}$ is non zero if and only if $\widetilde{\lambda}$ is of the form

$$\widetilde{\lambda} = (\,N + l, \underbrace{N + 1, ..., N + 1}_{n-r-1}, N + \varepsilon, \underbrace{N, ..., N}_{r-1}, N - a - l + 1 - \varepsilon\,)$$

with $\varepsilon \in \{0\,,\,1\}$ and $Sup\{1\,,\,1 - \varepsilon - a\} \leq l \leq N - a$. It follows that

$$\mathcal{M}^{S_{n-r}}_{N} \;\cong\; \mathcal{V}_{N} \;:=\; \bigoplus_{\substack{k = Sup\,\{\varepsilon\,,\,r - \frac{n-1}{2}\}\\ \varepsilon = 0\,,\,1}}^{N+r+\varepsilon-\frac{n+1}{2}} V_{\Big(\frac{n+1}{2}+2k-r-\varepsilon\,,\,\underbrace{\frac{n+1}{2}+k-r, ..., \frac{n+1}{2}+k-r}_{n-r-1},\; \frac{n-1}{2}+k-r+\varepsilon,\,\underbrace{\frac{n-1}{2}+k-r, ..., \frac{n-1}{2}+k-r}_{r-1}\Big)}$$

for $1 \leq r \leq n-1$.

Case 3. Let $\widetilde{\mu} = (\,N + \frac{n+1}{2}, 0, ..., 0\,)\,(N > \frac{n+1}{2})$ and let $\widetilde{\eta} = (\,N, ..., N, 0\,)$. Similarly to Case 1, one obtains that $C^{\widetilde{\lambda}}_{\widetilde{\mu},\widetilde{\eta}}$ is non zero if and only if $\widetilde{\lambda}$ is of the form

$$\widetilde{\lambda} = \big(\,N + k, N, ..., N, N + \frac{n+1}{2} - k\,\big)$$

with $\frac{n+1}{2} \leq k \leq N + \frac{n+1}{2}$. We deduce that

$$\mathcal{M}^{S_0}_{N} \;\cong\; \mathcal{W}_{N} \;:=\; \bigoplus_{k=\frac{n+1}{2}}^{N+\frac{n+1}{2}} V_{\left(-\frac{n+1}{2}+2k\,,-\frac{n+1}{2}+k\,,.....,-\frac{n+1}{2}+k\right)}\,.$$

Denote by $\mathcal{S}_{N}$ the subspace of $L^2(M\,,\,S)$ which is, as G-module, isomorphic to $\mathcal{U}_{N} \oplus \mathcal{V}_{N} \oplus \mathcal{W}_{N}$. Then we see that $\mathcal{M}^{S}_{N} \cong \mathcal{S}_{N}$ (as G-modules). We arrive at

Proposition 5 *Let $M = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, $S \longrightarrow M$ the bundle of spinors over M, and $\mathcal{M}^S_{_N} := \bigoplus_{r=0}^{n} \mathcal{M}^{S_{n-r}}_{_N}$ as above. Then there exists a G-equivariant epimorphism $Q_{_N} : \Gamma^\infty(M\,,\,S) \longrightarrow \mathcal{M}^S_{_N}$ such that $q_{_N} := Q_{_N}\big|_{\mathcal{S}_{_N}} : \mathcal{S}_{_N} \longrightarrow \mathcal{M}^S_{_N}$ is an isomorphism of G-modules.*

Proof. By Proposition 3 and the result of the analysis of the above three cases, we have that $L^2(M\,,\,S_{n-r})$ contains a unique G-submodule isomorphic to $\mathcal{M}^{S_{n-r}}_{_N}$. Summing over r yields the claim. □

Let us remark that - by direct inspection, using Proposition 3 - the decomposition of the G-module $L^2(M\,,\,S)$ into irreducibles is multiplicity free. Now, since the Dirac operator $D : \Gamma^\infty(M\,,\,S) \longrightarrow \Gamma^\infty(M\,,\,S)$ is G-equivariant and preserves the submodule $\mathcal{S}_{_N}$, one can define a linear map $D_{_N} : \mathcal{M}^S_{_N} \longrightarrow \mathcal{M}^S_{_N}$ by

$$D_{_N} = q_{_N} \circ D \circ (q_{_N})^{-1}\,.$$

The operator $D_{_N}$ can be concidered as a “fuzzy Dirac operator” with

$$Spec_{\,D_{_N}}(\mathcal{M}^S_{_N}) = Spec_{\,\left(D\big|_{\mathcal{S}_{_N}}\right)}(\mathcal{S}_{_N}),$$

i.e., the spectrum of $D_{_N}$ is a part of the spectrum of the classical Dirac operator, and in the limit $N \to \infty$, we recover the entire spectrum of the latter operator on $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ (see e.g., [CFG] for its explicit determination).

Remark. Analogously, it should be possible to consider a fuzzy version of the canonical $Spin^{\mathbb{C}}$-Dirac operator $\sqrt{2}\,(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*)$ on $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, acting on fuzzy approximations of $\Gamma^\infty(M\,,\,\bigoplus_{r=0}^{n} \bigwedge^{0,r} M)$, generalizing [$GS$] where the case $n = 2$ is studied.

5 Truncations of the space of sections of line bundles and fuzzy Bochner-Laplacians

As before, let L be the dual of the determinant line bundle over the Grassmannian $M = Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$ $(n \geq m \geq 1)$. In a spirit similar to the preceding section, we show that the quantization of $L^{\otimes k}$ is given by a G-equivariant truncation of the space of its L^2-sections.

By a result in [BH], we have:

Proposition 6 *For $k \in \mathbb{Z}$, one has the following isomorphisms of $SU(n+m)$-modules:*

(1) *for $m = 1$,*

$$L^2(M\,,\,L^{\otimes k}) \cong \begin{cases} \widehat{\bigoplus\limits_{b_1 \geq Sup\{0,k\}}} V_{(\,2\,b_1 - k\,,\,b_1 - k\,,\ldots,\,b_1 - k\,)} & \text{if } n \geq 2, \\ \\ \widehat{\bigoplus\limits_{b_1 \geq Sup\{0,k\}}} V_{(\,2\,b_1 - k\,)} & \text{if } n = 1; \end{cases}$$

(2) *for* $m \geq 2$, $L^2(M\,,\,L^{\otimes k}) \cong$

$$\begin{cases} \widehat{\bigoplus}_{b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_m \geq Sup\{0,k\}} V_{(\,2\,b_1-k\,,\,b_1+b_2-k\,,..,\,b_1+b_m-k\,,\,b_1-k\,,...,\,b_1-k\,,\; b_1-b_m\,,...,\,b_1-b_2\,)} & \textit{if } n \geq m+1, \\ \widehat{\bigoplus}_{b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_m \geq Sup\{0,k\}} V_{(\,2\,b_1-k\,,\,b_1+b_2-k\,,..,\,b_1+b_m-k\,,\,b_1-b_m\,,...,\,b_1-b_2\,)} & \textit{if } n = m. \end{cases}$$

Define the irreducible $SU(n+m)$-module $\mathcal{H}_N^{L^{\otimes k}} = V_{(N+k)\mu}$ with $k \in \mathbb{Z}$ and $N > Sup\{0\,,-k\}$, and the $\mathcal{A}_N$-module $\mathcal{M}_N^{L^{\otimes k}} := Hom_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_N^{L^{\otimes k}}\,,\,\mathcal{H}_N)$. The sequence $\big(\mathcal{M}_N^{L^{\otimes k}}\big)_N$ is now, similarly to $\big(\mathcal{M}_N^{S}\big)_N$ considered in Section 4, the "equivariant quantization of the line bundle $L^{\otimes k} \longrightarrow M$" in the sense of $[Ha]$, i.e., the $\mathcal{A}_N$-module $\mathcal{M}_N^{L^{\otimes k}}$ tend to the $C^\infty(M)$-module $\Gamma^\infty(M\,,\,L^{\otimes k})$. In this section, we shall prove that the space $\mathcal{M}_N^{L^{\otimes k}}$ is isomorphic to a truncation of $L^2(M\,,\,L^{\otimes k})$.

In fact, let $\tau_{\widetilde{\mu}}$ and $\tau_{\widetilde{\eta}}$ be irreducible representations of $U(n+m)$ with highest weights

$$\widetilde{\mu} = (\underbrace{N+k,...,N+k}_{m},0,...,0) \quad \text{and} \quad \widetilde{\eta} = (\underbrace{N,...,N}_{n},0,...,0),$$

respectively. Then,

$$\tau_{\widetilde{\mu}} \otimes \tau_{\widetilde{\eta}} \cong \bigoplus_{\widetilde{\lambda}} C^{\widetilde{\lambda}}_{\widetilde{\mu},\widetilde{\eta}}\, \tau_{\widetilde{\lambda}}\,,$$

where $\tau_{\widetilde{\lambda}}$ denotes an irreducible polynomial representation with highest weight $\widetilde{\lambda}$. Note that (see Proposition 4 in $[BH]$) the multiplicity $C^{\widetilde{\lambda}}_{\widetilde{\mu},\widetilde{\eta}}$ is either 0 or 1, and $C^{\widetilde{\lambda}}_{\widetilde{\mu},\widetilde{\eta}} = 1$ if and only if $\widetilde{\lambda}$ is of the form

$$\widetilde{\lambda} = \begin{cases} (\,b_1+N\,,...,\,b_m+N\,,\,N\,,...,\,N\,,\,N+k-b_m\,,...,\,N+k-b_1\,) & \text{if } n \geq m+1, \\ (\,b_1+N\,,...,\,b_m+N\,,\,N+k-b_m\,,...,\,N+k-b_1\,) & \text{if } n = m, \end{cases}$$

with $N+k \geq b_1 \geq \ldots \geq b_m \geq Sup\{0\,,\,k\}$. Thus we obtain the following isomorphisms of $SU(n+m)$-modules:

(1) for $m = 1$,

$$\mathcal{M}_N^{L^{\otimes k}} \cong \begin{cases} \widehat{\bigoplus}_{N+k \geq b_1 \geq Sup\{0,k\}} V_{(\,2\,b_1-k\,,\,b_1-k\,,...,\,b_1-k\,)} & \text{if } n \geq 2, \\ \widehat{\bigoplus}_{N+k \geq b_1 \geq Sup\{0,k\}} V_{(\,2\,b_1-k\,)} & \text{if } n = 1; \end{cases}$$

(2) for $m \geq 2$, $\mathcal{M}_N^{L^{\otimes k}} \cong$

$$\begin{cases} \widehat{\bigoplus}_{N+k \geq b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_m \geq Sup\{0,k\}} V_{(\,2\,b_1-k\,,\,b_1+b_2-k\,,..,\,b_1+b_m-k\,,\,b_1-k\,,...,\,b_1-k\,,\; b_1-b_m\,,...,\,b_1-b_2\,)} & \text{if } n \geq m+1, \\ \widehat{\bigoplus}_{N+k \geq b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_m \geq Sup\{0,k\}} V_{(\,2\,b_1-k\,,\,b_1+b_2-k\,,..,\,b_1+b_m-k\,,\,b_1-b_m\,,...,\,b_1-b_2\,)} & \text{if } n = m. \end{cases}$$

Comparing this result with Proposition 5, we get:

Proposition 7 *Let $M = Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$, $L = Det^* \longrightarrow M$, and as above $\mathcal{M}_N^{L^{\otimes k}} = Hom_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_N^{L^{\otimes k}}, \mathcal{H}_N)$. Then there exists a unique $SU(n+m)$-submodule Γ_N^k in $L^2(M, L^{\otimes k})$ isomorphic to $\mathcal{M}_N^{L^{\otimes k}}$.*

Fix a $SU(n+m)$-equivariant isomorphism $\Phi_N^k : \Gamma_N^k \longrightarrow \mathcal{M}_N^{L^{\otimes k}}$. Let now $\nabla_k^* \nabla_k$ be the usual Bochner-Laplacian (relative to the natural L^2-structure on sections of $L^{\otimes k}$) acting on $\Gamma^\infty(M, L^{\otimes k})$. The operator

$$(\nabla_k^* \nabla_k)_N := \Phi_N^k \circ \nabla_k^* \nabla_k \circ (\Phi_N^k)^{-1}$$

is well-defined, independently of the choice of Φ_N^k, and can be considered as a "fuzzy Bochner-Laplacian". Clearly, the spectrum of $(\nabla_k^* \nabla_k)_N$ on $\mathcal{M}_N^{L^{\otimes k}}$ satisfies the relation:

$$Spec_{(\nabla_k^* \nabla_k)_N}(\mathcal{M}_N^{L^{\otimes k}}) = Spec_{\left(\nabla_k^* \nabla_k\big|_{\Gamma_N^k}\right)}(\Gamma_N^k),$$

and thus it can be deduced from the computation of $Spec_{\nabla_k^* \nabla_k}(\Gamma^\infty(M, L^{\otimes k}))$ (see $[BH]$, Proposition 6).

References

[A] D.N. Akhiezer, *Lie Group Actions in Complex Analysis*, Vieweg, Braunschweig, 1995.

[BDLMO] A.P. Balachandran, B.P. Dolan, J. Lee, X. Martin, D. O'Connor, Fuzzy Complex Projective Spaces and their Star-Products, *J. Geom. Phys.* **43** (2002), 184-204.

[BH] M. Ben Halima, Branching Rules for Unitary Groups and Spectra of Invariant Differential Operators on Complex Grassmannians, submitted.

[BMS] M. Bordemann, E. Meinrenken, M. Schlichenmaier, Toeplitz Quantization of Kähler Manifolds and $gl(N)$, $N \to \infty$ Limits, *Commun. Math. Phys.*, **165** (1994), 281-269.

[BdMG] L. Boutet de Monvel, V. Guillemin, *The Spectral Theory of Toeplitz Operators*, Princeton University Press, Princeton, 1981.

[CFG] M. Cahen, M. Franc, S. Gutt, Spectrum of the Dirac Operator on Complex Projective Space $P_{2q-1}(\mathbb{C})$, *Lett. Math. Phys.*, **18** (1989), 165-176; and Erratum in *Lett. Math. Phys.*, **32** (1994), 365-368.

[CGR1] M. Cahen, S. Gutt, J. Rawnsley, Quantization of Kähler Manifolds. I. Geometric Interpretation of Berezin's Quantization, *J. Geom. Phys.*, **7** (1990), 45-62.

[CGR2] M. Cahen, S. Gutt, J. Rawnsley, Quantization of Kähler Manifolds. II. *Trans. Amer. Math. Soc.* **337** (1993), 73-98.

[DO] B.P. Dolan, J. Olivier, Fuzzy Complex Grassmannian Spaces and their Star Products, *Internat. J. Modern Phys. A* **18** (2003), 1935-1958.

[D-V] M. Dubois-Violette, Dérivations et Calcul Différentiel Non Commutatif, *C.R. Acad. Sci. Paris. t.* **307** (1988), 403-408.

[D-VKM] M. Dubois-Violette, R. Kerner, J. Madore, Noncommutative Differential Geometry of Matrix Algebras, *J. Math. Phys.* **31** (1990), 316-322.

[Fr] T. Friedrich, *Dirac Operators in Riemannian Geometry*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2000.

[FH] W. Fulton, J. Harris, *Representation Theory*, Graduate texts in Math., Vol 192, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1991.

[GKP] H. Grosse, C. Klimcik, P. Presnajder, Simple Field Theoretical Models on Noncommutative Manifolds, in: *Lie Theory and its Applications in Physics* (*Clausthal, 1995*), 117-131, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1996.

[GS] H. Grosse, A. Strohmaier, Noncommutative Geometry and the Regularization Problem of $4D$ Quantum Field Theory, *Lett. Math. Phys.* **48** (1999), 163-179.

[Ha] E. Hawkins, Quantization of Equivariant Vector Bundles, *Commun. Math. Phys.*, **202** (1999), 517-546.

[He] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York, 1978.

[Kn] A.W. Knapp, *Lie Groups Beyond an Introduction*, Second Edition, Birkhäuser, Boston, 2002.

[M1] J. Madore, The Fuzzy Sphere, *Class. Quantum Grav.* **9** (1992), 69-87.

[M2] J. Madore, *An Introduction to Noncommutative Differential Geometry and its Physical Applications*, Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[R] J.H. Rawnsley, Coherent States and Kähler Manifolds, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* (2) **28** (1977), 403-415.

[S] M. Schlichenmaier, Berezin-Toeplitz Quantization and Berezin Symbols for Arbitrary Compact Kähler Manifolds, *Mannheimer Manuskripte* **238**, math.QA/9902066.

Appendice A : Spectres d'opérateurs différentiels invariants sur des fibrés homogènes

1 Généralités sur les opérateurs différentiels

Dans cette section, on rappelle quelques notions de base sur les opérateurs différentiels géométriques. En particulier, on examine la propriété d'ellipticité de certains opérateurs différentiels qui nous intéréssent dans notre étude.

Etant donné un fibré vectoriel C^∞, E, au dessus d'une variété C^∞, M, on note par $\Gamma^\infty(E)$ l'espace des sections C^∞ de E.

Définition 1 *Soit M une variété C^∞. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-fibrés vectoriels C^∞ au dessus de M ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Une application linéaire*

$$D : \Gamma^\infty(E) \longrightarrow \Gamma^\infty(F)$$

est appelée un ***opérateur différentiel*** *d'ordre m si pour tout $x \in M$, il existe un voisinage U de x dans M et des trivialisations C^∞, $E|_U \xrightarrow{\Psi} U \times \mathbb{K}^l$ et $F|_U \xrightarrow{\Phi} U \times \mathbb{K}^r$, telles que si $f \in \Gamma^\infty(E)$, $y \in U$, $(\Psi f)(y) = (y\,, F(y))$, et $(\Phi D f)(y) = (y\,, G(y))$, alors*

$$G(y) = \sum_{i_1+\cdots+i_n \leq m} A_{i_1,\ldots,i_n}(y)\, \frac{\partial^{i_1+\cdots+i_n}}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_n^{i_n}}\, F(y)\,,$$

où $x_1, \ldots, x_n$ sont les coordonnées locales dans U et $A_{i_1,\ldots,i_n}$ est une application C^∞ de U à valeurs dans $L(\mathbb{K}^l\,, \mathbb{K}^r)$.

Exemple. Soient $E = \bigwedge^k T^*M$, $F = \bigwedge^{k+1} T^*M$, et $d : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$ la différentielle extérieure. Si U est un voisinage de coordonnées de $y \in M$ et si $\omega \in \Omega^k(M)$ avec

$$\omega|_U = \sum a_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}\,,$$

alors

$$(d\omega)|_U = \sum da_{i_1,\ldots,i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}\,.$$

Ceci montre que d est un opérateur différentiel d'ordre 1.

Désormais, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et les fibrés vectoriels seront supposés complexes.

Définition 2 *Soit E un fibré vectoriel C^∞ au dessus d'une variété C^∞, M. Une* ***structure unitaire*** *C^∞ sur E est un champ C^∞ de produits scalaires hermitiens sur les fibres de E, i.e., pour tout $x \in M$, $\langle\ ,\ \rangle : E_x \times E_x \longrightarrow \mathbb{C}$ satisfait :*

(1) *$\langle u\,, v \rangle$ est $\mathbb{C}$-linéaire dans u pour tout $v \in E_x$;*

(2) $\langle u , v \rangle = \overline{\langle v , u \rangle}$ *pour tous* $u,\ v \in E_x$;

(3) $\langle u , u \rangle > 0$ *pour tout* $u \in E_x,\ u \neq 0$;

(4) $\langle f , g \rangle$ *est une fonction* C^∞ *sur* M *pour tous* $f,\ g \in \Gamma^\infty(E)$.

Remarque. Si M est une variété C^∞, alors chaque fibré vectoriel C^∞ au dessus de M admet une structure unitaire C^∞.

Soit maintenant M une variété C^∞ orientable et soit ω un élément de volume pour M. Soient E et F deux fibrés vectoriels C^∞ au dessus de M. Fixons une structure unitaire C^∞, $\langle\ ,\ \rangle$, sur E (resp. F) et notons par $\Gamma_0^\infty(E)$ (resp. $\Gamma_0^\infty(F)$) l'espace des sections C^∞ à support compact de E (resp. F). Soit $D : \Gamma^\infty(E) \longrightarrow \Gamma^\infty(F)$ un opérateur différentiel. On dit qu'un opérateur différentiel $D^* : \Gamma^\infty(F) \longrightarrow \Gamma^\infty(E)$ est un **adjoint formel** de D si pour tous $f \in \Gamma_0^\infty(E)$, $g \in \Gamma_0^\infty(F)$, on a

$$\int_M \langle Df , g\rangle \, \omega = \int_M \langle f , D^* g\rangle \, \omega \, .$$

Théorème 1 *Soit* $D : \Gamma^\infty(E) \longrightarrow \Gamma^\infty(F)$ *un opérateur différentiel d'ordre* m. *Alors* D *admet un unique adjoint formel* D^* *(dépendant uniquement du choix des structures unitaires et de l'elément de volume). De plus,* D^* *est un opérateur différentiel d'ordre* m.

Démonstration. Voir [Wa]. □

Soit $D : \Gamma^\infty(E) \longrightarrow \Gamma^\infty(F)$ un opérateur différentiel d'ordre m. Soient $x \in M$ et $\xi \in T^*M$. Soit $(x_1, ..., x_n)$ un système de coordonnées locales autour de x. Alors, $\xi = \sum \xi_i \, dx_i$. Pour $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice, on pose $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ et $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} ... \xi_n^{\alpha_n}$. Dans un voisinage convenable de x, l'expression locale de l'opérateur D est de la forme

$$D = \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha \, D^\alpha \, , \quad \text{où} \quad D^\alpha = (-i)^{|\alpha|} \, \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}} \, .$$

Posons $\sigma(D , \xi) = \sum_{|\alpha| = m} A_\alpha \, \xi^\alpha$. Alors, $\sigma(D , \xi)$ est une application linéaire entre E_x et F_x. Le lemme suivant montre que cette application est bien définie (i.e., ne dépend pas des choix adoptés dans sa définition). On appelle $\sigma(D , \cdot)$ le **symbole principal** de D.

Lemme 1 *Soient* $x \in M$, $v \in E_x$ *et* $\xi \in T_x^* M$. *Soient* $f \in \Gamma^\infty(E)$ *et* $\varphi \in C^\infty(M)$ *telles que* $f(x) = v$ *et* $(d\varphi)_x = \xi$. *Alors,*

$$\sigma(D , \xi) \, v = \frac{(i)^m}{m\,!} \, \frac{d^m}{dt^m} \Big|_{t=0} (e^{-t\varphi} D e^{t\varphi} f)(x) \, .$$

Démonstration. Dans un système de coordonnées locales autour de x et relativement à des trivialisations locales de E et F, on a

$$Df = \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha \, D^\alpha f \, ,$$

où α est un multi-indice. Observons que

$$D(e^{t\varphi}f)(x) = e^{t\varphi}\Big\{t^m(-i)^m\Big(\sum_{|\alpha|=m}\xi^\alpha A_\alpha v\Big) + \text{des termes d'ordre inférieur en t}\Big\}.$$

Le résultat du lemme découle immédiatement de cette observation. □

Proposition 1 (a) *Soient E, F, et G des fibrés vectoriels C^∞ au dessus de M. Soient $D_1 : \Gamma^\infty(E) \longrightarrow \Gamma^\infty(F)$ et $D_2 : \Gamma^\infty(F) \longrightarrow \Gamma^\infty(G)$ deux opérateurs différentiels. Alors, $\sigma(D_2\, D_1\,,\,\xi) = \sigma(D_2\,,\,\xi)\circ\sigma(D_1\,,\,\xi)$ pour $\xi \in T_x^*M$.*
(b) *Supposons que E et F sont munis de structures unitaires et que ω est un élément de volume pour M. Soit D^* l'adjoint formel de D relativement aux choix mentionnés. Alors, $\sigma(D^*\,,\,\xi) = \sigma(D\,,\,\xi)^*$ pour $\xi \in T_x^*M$, où $\sigma(D\,,\,\xi)^*$ est l'adjoint de $\sigma(D\,,\,\xi)$ relativement aux produits scalaires sur E_x et F_x.*

Démonstration. Voir [P]. □

Définition 3 *Un opérateur différentiel $D : \Gamma^\infty(E) \longrightarrow \Gamma^\infty(F)$ est dit **elliptique** si $\sigma(D\,,\,\xi)$ est un isomorphisme pour tout $\xi \neq 0$.*

Par la suite, nous allons donner quelques exemples d'opérateurs différentiels elliptiques.

Exemple 1. Le laplacien de Hodge

Supposons que M est munie d'une structure riemannienne $\langle\ ,\ \rangle$. On étend $\langle\ ,\ \rangle$ en une structure unitaire sur $\bigwedge^k T^*M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ pour chaque k. Soit d^* l'adjoint formel de d, et soit $\Delta = d\,d^* + d^*d$ le laplacien de Hodge de $(M\,,\,\langle\ ,\ \rangle)$. Dans ce qui suit, on se propose de calculer le symbole de Δ.

Soient $x \in M$, $\xi \in T_x^*M$, et $\eta \in \bigwedge^k T_x^*M$. Soient $\beta \in \Omega^k(M)$ et $\varphi \in C^\infty(M)$ telles que $\beta_x = \eta$ et $(d\varphi)_x = \xi$. Notons que si $f \in C^\infty(M)$, alors $d(f\beta) = df \wedge \beta + fd\beta$. On a donc

$$\begin{aligned}\sigma(d\,,\,\xi)\eta &= (i)\,\frac{d}{dt}\Big|_0\{e^{-t\varphi}d\,e^{t\varphi}\beta\}_x\\ &= (i)\,\frac{d}{dt}\Big|_0\{t(d\varphi)_x\wedge\eta + (d\beta)_x\}\\ &= (i)(\xi\wedge\eta).\end{aligned}$$

Pour $\xi \in T_x^*M$, on définit $\varepsilon(\xi)\eta = \xi \wedge \eta$. Il s'ensuit que $\sigma(d\,,\,\xi) = (i)\,\varepsilon(\xi)$.

Soit l'application $T_xM \longrightarrow T_x^*M\,,\ v \longmapsto v^\sharp$ donnée par $v^\sharp(w) = \langle\, v\,,\,w\,\rangle_x\,$, où $w \in T_xM$. Pour $\xi \in T_x^*M$, on définit $\xi^\flat$ par $(\xi^\flat)^\sharp = \xi$. Pour $v \in T_xM$, on définit une application

$$i(v) : \bigwedge^{k+1} T_x^*M \otimes \mathbb{C} \longrightarrow \bigwedge^{k} T_x^*M \otimes \mathbb{C}$$

par $(i(v)\,\omega)(v_1, ..., v_k) := \omega(v, v_1, ..., v_k)$. On vérifie facilement que $\varepsilon(\xi)^* = i(\xi^\flat)$. Par conséquent, $\sigma(d^*\,,\,\xi) = (-i)\,i(\xi^\flat)$ et

$$\begin{aligned}\sigma(\Delta\,,\,\xi) &= \sigma(d\,,\,\xi)\circ\sigma(d^*\,,\,\xi) + \sigma(d^*\,,\,\xi)\circ\sigma(d\,,\,\xi)\\ &= \varepsilon(\xi)\,i(\xi^\flat) + i(\xi^\flat)\,\varepsilon(\xi)\\ &= \langle\,\xi\,,\,\xi\,\rangle\,Id.\end{aligned}$$

Ainsi, le laplacien de Hodge Δ est un opérateur différentiel elliptique.

Exemple 2. Le laplacien complexe

Soit (M^{2n}, J) une variété presque-complexe où J est une structure presque complexe, i.e., $J^2 = -Id$. On définit une action de J sur les 1-formes $\omega \in T^*M$ par $(J\omega)(X) := \omega(JX)$, où $X \in TM$. L'application $\mathbb{R}$-linéaire J s'étend en une application $\mathbb{C}$-linéaire sur $T^*M \otimes \mathbb{C}$ en posant $J(\omega \otimes z) := J(\omega) \otimes z$ pour $\omega \in T^*M$ et $z \in \mathbb{C}$. De plus, cette extension vérifie encore $J^2 = -Id$. Par suite, J admet deux valeurs propres $\{\pm i\}$ et $T^*M \otimes \mathbb{C}$ se décompose en la somme directe de deux sous espaces propres associés à $\{\pm i\}$, i.e., $T^*M \otimes \mathbb{C} =: \bigwedge^1 M = \bigwedge^{1,0} M \oplus \bigwedge^{0,1} M$ avec

$$\bigwedge^{1,0} M = \{\omega \in T^*M \otimes \mathbb{C}\,;\ J\omega = i\omega\},$$

et

$$\bigwedge^{0,1} M = \{\omega \in T^*M \otimes \mathbb{C}\,;\ J\omega = -i\omega\}.$$

Soit $\bigwedge^{p,q} M$ l'espace engendré par les éléments $\alpha \wedge \beta$ avec $\alpha \in \bigwedge^p(\bigwedge^{1,0} M)$ et $\beta \in \bigwedge^q(\bigwedge^{0,1} M)$. Alors, $\bigwedge^r M = \sum_{p+q=r} \bigwedge^{p,q} M$. On note par $\Omega^r(M)$ (resp. $\Omega^{p,q}(M)$) l'espace des sections C^∞ du fibré $\bigwedge^r M$ (resp. $\bigwedge^{p,q} M$). Les éléments de $\Omega^{p,q}(M)$ sont appelés les formes différentielles complexes de type (p, q). On note $\Pi^{p,q}$ la projection naturelle de $\Omega^r(M)$ sur le sous-espace $\Omega^{p,q}(M)$ $(p + q = r)$.

Soit maintenant M une variété complexe de dimension réelle $2n$ et soit U un ouvert de M équipé des coordonnées holomorphes $z_1, ..., z_n$, où $z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$ (i.e., $x_1, y_1, ..., x_n, y_n$ forment un système de coordonnées locales dans U). L'extension $\mathbb{C}$-linéaire de d satisfait $dz_i = dx_i + \sqrt{-1}\, dy_i$. Par définition de $\bigwedge^{1,0} M$, $(dz_1, ..., dz_n)$ forme un repère linéaire de $\bigwedge^{1,0} M\big|_U$. Similairement, $d\,\overline{z}_i = dx_i - \sqrt{-1}\, dy_i$ et $(d\,\overline{z}_1, ..., d\,\overline{z}_n)$ forme un repère linéaire de $\bigwedge^{0,1} M\big|_U$. Si ω est une section C^∞ de $\bigwedge^r M\big|_U$, alors

$$\omega = \sum_{k+l=r} \sum_{\substack{|I|=k \\ |J|=l}} a_{I,J}\, dz_I \wedge d\,\overline{z}_J\,,$$

où $I = (i_1, ..., i_k) \in \mathbb{N}^k$ $(1 \le i_1 < ... < i_k \le n)$, $J = (j_1, ..., j_l) \in \mathbb{N}^l$ $(1 \le j_1 < ... < j_l \le n)$, $dz_I = dz_{i_1} \wedge ... \wedge dz_{i_k}$, et $d\,\overline{z}_J = d\,\overline{z}_{j_1} \wedge ... \wedge d\,\overline{z}_{j_l}$. Notons que

$$d\,\omega = \sum_{k+l=r} \sum_{\substack{|I|=k \\ |J|=l}} d\,a_{I,J} \wedge dz_I \wedge d\,\overline{z}_J$$

avec

$$d\,a_{I,J} = \sum \left(\frac{\partial\, a_{I,J}}{\partial\, z_i}\right) dz_i + \sum \left(\frac{\partial\, a_{I,J}}{\partial\, \overline{z}_i}\right) d\,\overline{z}_i\,.$$

Définissons $\partial\, a_{I,J} = \sum \left(\frac{\partial\, a_{I,J}}{\partial\, z_i}\right) dz_i$ et $\overline{\partial}\, a_{I,J} = \sum \left(\frac{\partial\, a_{I,J}}{\partial\, \overline{z}_i}\right) d\,\overline{z}_i$. En posant

$$\partial\, \omega = \sum \partial\, a_{I,J} \wedge dz_I \wedge d\,\overline{z}_J$$

et

$$\overline{\partial}\,\omega = \sum \overline{\partial}\, a_{I,J} \wedge dz_I \wedge d\,\overline{z}_J\,,$$

on obtient que $d\omega = (\partial + \overline{\partial})\omega$. Observons que $\partial|_{\Omega^{p,q}(M)} = \Pi^{p+1,q} \circ d|_{\Omega^{p,q}(M)}$ et que $\overline{\partial}|_{\Omega^{p,q}(M)} = \Pi^{p,q+1} \circ d|_{\Omega^{p,q}(M)}$. Ainsi, ∂ et $\overline{\partial}$ sont bien définis, i.e., ne dépendent pas du système de coordonnées holomorphes $(z_1, ..., z_n)$ choisi. Notons aussi que $\partial : \Omega^{p,q}(M) \longrightarrow \Omega^{p+1,q}(M)$ (resp. $\overline{\partial} : \Omega^{p,q}(M) \longrightarrow \Omega^{p,q+1}(M)$) est un opérateur différentiel d'ordre 1 et que $\partial^2 = \overline{\partial}^2 = 0$. De plus, de l'égalité $d^2 = 0$, on déduit que $\partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial = 0$.

Soit $\langle\ ,\ \rangle$ une structure riemannienne sur TM telle que la structure presque-complexe J de M est une isométrie. Etendons $\langle\ ,\ \rangle$ en une structure unitaire sur $\bigwedge^{0,r} M$ pour chaque r. Soit $\overline{\partial}^*$ l'adjoint formel de $\overline{\partial}$ relativement à ces produits scalaires et à l'élément de volume riemannien sur M. Soit $p \in M$ et soit U un voisinage de p équipé des coordonnées holomorphes $z_1, ..., z_n$ où $z_i = x_i + \sqrt{-1}\, y_i$. Si $\xi \in T^*M$, alors $\xi = \sum a_i\, dx_i + \sum b_i\, dy_i$. Posons $\xi^0 = \frac{1}{2} \sum (a_i + \sqrt{-1}\, b_i) d\,\overline{z}_i$, i.e., ξ^0 est la projection de ξ sur $\bigwedge^{0,1} M$ relativement à la décomposition somme directe $(T^*M)^{\mathbb{C}} = \bigwedge^{1,0} M \oplus \bigwedge^{0,1} M$. Notons que si $\varphi \in C^\infty(M)$, alors $(d\varphi)^0 = \overline{\partial}\,\varphi$.

Soient $\xi \in T_p^*M$ et $\varphi \in C^\infty(M)$ avec $(d\varphi)_p = \xi$. Soit $\eta \in \bigwedge^{0,r}(T_p^*M)^{\mathbb{C}}$ et soit $\omega \in \Omega^{0,r}(M)$ telle que $\omega_p = \eta$. Alors,

$$\begin{aligned}
\sigma(\overline{\partial}\,, \xi)\eta &= (i)\, \frac{d}{dt}\Big|_0 \{e^{-t\varphi}\, \overline{\partial}\, e^{t\varphi}\omega\}(p) \\
&= (i)\, \frac{d}{dt}\Big|_0 \{t(\overline{\partial}\,\varphi)_p \wedge \omega_p + (\overline{\partial}\,\omega)_p\} \\
&= (i)((\overline{\partial}\,\varphi)_p \wedge \eta) \\
&= (i)\,\varepsilon(\xi^0)\eta.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\sigma(\overline{\partial}\,, \xi) = (i)\,\varepsilon(\xi^0)$. En étendant l'application $\xi \longmapsto \xi^\flat$ à $(T^*M)^{\mathbb{C}}$ en utilisant la structure hermitienne sur $(TM)^{\mathbb{C}}$, on obtient que

$$\begin{aligned}
\sigma(\overline{\partial}^*\,, \xi) &= \sigma(\overline{\partial}\,, \xi)^* \\
&= (-i)\, i((\xi^0)^\flat).
\end{aligned}$$

L'opérateur différentiel de second ordre $\Box := \overline{\partial}\,\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\,\overline{\partial}$ est appelé le laplacien complexe de M (on le note aussi par $\Delta_{\overline{\partial}}$). Observons que

$$\begin{aligned}
\sigma(\Box\,, \xi) &= \sigma(\overline{\partial}\,, \xi) \circ \sigma(\overline{\partial}^*\,, \xi) + \sigma(\overline{\partial}^*\,, \xi) \circ \sigma(\overline{\partial}\,, \xi) \\
&= \langle \xi\,, \xi \rangle\, Id.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\Box$ est elliptique.

Exemple 3. Le laplacien de Bochner

Soit $(M^n\,, g)$ une variété riemannienne compacte et soit ω l'élément de volume riemannien. Soit E un fibré vectoriel C^∞ au dessus de M et soit $\langle\ ,\ \rangle$ une structure unitaire C^∞ sur E. On étend cette structure unitaire sur $\Gamma^\infty(E)$ aux sections C^∞ de $T^*M \otimes E$ par

$$\begin{array}{rccc} \langle\ ,\ \rangle : & \Gamma^\infty(T^*M \otimes E) \times \Gamma^\infty(T^*M \otimes E) & \longrightarrow & C^\infty(M\,,\,\mathbb{C})\,, \\ & (\alpha \otimes \varphi\,,\,\beta \otimes \psi) & \longmapsto & g(\alpha\,,\,\beta)\langle\,\varphi\,,\,\psi\,\rangle \end{array}$$

où la métrique g s'étend au co-vecteurs à l'aide de l'isomorphisme $T^*M \cong TM$ induit par g. Supposons que E admet une connexion métrique et notons ∇ sa dérivée covariante associée. Soit $\nabla^* : \Gamma^\infty(T^*M \otimes E) \longrightarrow \Gamma^\infty(E)$ l'adjoint formel de ∇ relativement à $\langle\ ,\ \rangle_{L^2} := \int_M \langle\ ,\ \rangle\,\omega$. Par définition, ∇^* satisfait l'égalité

$$\langle\,\nabla^*\varphi\,,\,\psi\,\rangle_{L^2} = \langle\,\varphi\,,\,\nabla\psi\,\rangle_{L^2}$$

pour tout $\varphi \in \Gamma^\infty(T^*M \otimes E)$ et tout $\psi \in \Gamma^\infty(E)$.

Remarque. Si $e = (e_1, ..., e_n)$ est un repère orthonormal de champs de vecteurs définis sur un ouvert U de M, alors

$$(\star) \qquad \nabla^*\nabla\varphi = -\sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\varphi$$

sur U pour tout $\varphi \in \Gamma^\infty(M\,,\,E)$. En effet, pour φ et ψ deux sections C^∞ du fibré E à support dans U, on a

$$\begin{aligned} \langle\,\nabla^*\nabla\varphi\,,\,\psi\,\rangle_{L^2} &= \langle\,\nabla\varphi\,,\,\nabla\psi\,\rangle_{L^2} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle\,\nabla_{e_i}\varphi\,,\,\nabla_{e_i}\psi\,\rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

Observons que

$$\sum_{i=1}^{n} \langle\,\nabla_{e_i}\varphi\,,\,\nabla_{e_i}\psi\,\rangle = \sum_{i=1}^{n} e_i\,\langle\,\nabla_{e_i}\varphi\,,\,\psi\,\rangle - \langle\,\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\varphi\,,\,\psi\,\rangle.$$

En intégrant sur M, on obtient que

$$\langle\,\nabla^*\nabla\varphi\,,\,\psi\,\rangle_{L^2} = -\sum_{i=1}^{n} \langle\,\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\varphi\,,\,\psi\,\rangle_{L^2}\,,$$

ce qui implique la formule $(\star)$.

Calculons maintenant le symbole de $\nabla^*\nabla$. Soient $v \in E_x$ et $\xi \in T_x^*M$. Soient $f \in \Gamma^\infty(E)$ et $\varphi \in C^\infty(M)$ telles que $f(x) = v$ et $(d\varphi)_x = \xi$. Alors,

$$\begin{aligned} \sigma(\nabla\,,\,\xi)v &= (i)\,\frac{d}{dt}\bigg|_0 \{e^{-t\varphi}\nabla e^{t\varphi} f\}(x) \\ &= (i)\,\frac{d}{dt}\bigg|_0 \{t(d\varphi)_x \otimes f(x) + (\nabla f)(x)\} \\ &= (i)(\xi \otimes v). \end{aligned}$$

Soit l'application linéaire $A_\xi : E_x \longrightarrow T_x^*M \otimes E_x\,,\ v \longmapsto \xi \otimes v$. L'adjoint de A_ξ est donné par $(A_\xi)^*(\eta \otimes w) = \langle \eta\,,\,\xi\rangle\,w$ pour $\eta \in T_x^*M$ et $w \in E_x$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \sigma(\nabla^*\nabla\,,\,\xi)v &= (A_\xi)^* A_\xi(v) \\ &= \|\xi\|^2\,v. \end{aligned}$$

On conclut que le laplacien de Bochner est elliptique.

Exemple 4. L'opérateur de Dirac

Soit $(M^n\,,\,g)$ une variété riemannienne admettant une strucure spin et soit S le fibré des spineurs associé. On note par ∇ la connexion spinorielle et par $\mu\,:\,T^*M\otimes S\longrightarrow S$ le morphisme de fibrés induit par la multiplication de Clifford. La composition

$$D=\mu\circ\nabla:\Gamma^\infty(S)\xrightarrow{\nabla}\Gamma^\infty(T^*M\otimes S)\xrightarrow{\mu}\Gamma^\infty(S)$$

est appelée l'opérateur de Dirac. Relativement à un repère orthonormé local $e=(e_1,...,e_n)$ sur la variété M^n, $D\psi=\sum_{i=1}^n e_i\cdot\nabla_{e_i}\psi$ pour tout $\psi\in\Gamma^\infty(S)$ (voir, par exemple, $[F]$).

L'opérateur de Dirac est clairement un opérateur différentiel d'ordre 1. Soient $x\in M$ et $\xi\in T_x^*M$. Soient $f\in C^\infty(M\,,\,\mathbb{R})$ telle que $(df)_x=\xi$ et $\psi\in\Gamma^\infty(S)$. Le symbole de l'opérateur de Dirac est donné par

$$\begin{aligned}\sigma(D\,,\,\xi)\psi(x) &= (i)\left.\frac{d}{dt}\right|_0\{e^{-tf}De^{tf}\psi\}(x)\\ &= (i)\left.\frac{d}{dt}\right|_0\{t(df)_x\cdot\psi(x)+(D\psi)(x)\}\\ &= (i)((df)_x\cdot\psi(x))\\ &= (i\xi)\cdot\psi(x).\end{aligned}$$

L'application $\sigma(D\,,\,\xi)$ est donc la multiplication de Clifford par $i\xi$. Ceci montre que l'opérateur de Dirac est elliptique.

2 Opérateurs différentiels sur des fibrés homogènes

Cette section sera consacrée à l'étude d'une classe d'opérateurs différentiels, dits invariants, agissant sur des espaces de sections de fibrés vectoriels homogènes. Commençons d'abord par introduire quelques notions sur les espaces homogènes.

Proposition 2 *Soit G un groupe de Lie et soit K un sous-groupe fermé de G. Alors il existe une unique structure de variété C^∞ sur G/K de sorte que la projection canonique $\pi:G\longrightarrow G/K$ soit une submersion.*

Démonstration. Voir $[BtD]$. □

La variété $M=G/K$ est appelée un **espace homogène**.

Proposition 3 *Soit $G\times M\longrightarrow M$ une action transitive d'un groupe de Lie G sur une variété M, et soit $K=G_m$ le sous groupe d'isotropie en un point m. Alors,*
(a) le sous-groupe K est un sous-groupe fermé de G (et donc un sous-groupe de Lie de G);
(b) l'application naturelle $j\,:\,G/K\longrightarrow M$, $gK\longmapsto j(gK)=g\cdot m$ est un difféomorphisme.

Démonstration. Voir [BtD]. □

Ainsi, toute variété sur laquelle un groupe de Lie agit transitivement est un espace homogène.

Exemple. Soit $Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$ l'ensemble de tous les sous-espaces de dimension n dans $\mathbb{C}^{n+m}$, la variété de Grassmann complexe. Notons que $Gr_1(\mathbb{C}^{m+1}) = \mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ et que $Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$ est difféomorphe à $Gr_m(\mathbb{C}^{n+m})$. Le groupe $U(n+m)$ agit naturellement sur $Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$. Cette action est clairement transitive. Soit V le sous-espace de $\mathbb{C}^{n+m}$ engendré par les n premiers vecteurs de la base canonique $\{e_1, ..., e_{n+m}\}$ de $\mathbb{C}^{n+m}$. Le stabilisateur du sous-espace V est le sous-groupe $U(n) \times U(m)$. Par suite,

$$Gr_n(\mathbb{C}^{n+m}) \cong U(n+m)/(U(n) \times U(m)).$$

Le groupe $SU(n+m)$ agit aussi transitivement sur la grassmanienne $Gr_n(\mathbb{C}^{n+m})$ et on montre de façon similaire que

$$Gr_n(\mathbb{C}^{n+m}) \cong SU(n+m)/S(U(n) \times U(m)).$$

Soit G/K un espace homogène et soit $\pi : G \longrightarrow G/K$ la projection canonique. Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ les algèbres de Lie respectives de G et K.

Définition 4 *Un espace homogène est dit **réductif** s'il existe un sous-espace $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ et $Ad(k)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$ pour tout $k \in K$, i.e., $\mathfrak{m}$ est $Ad(K)$-invariant.*

Exemple. Si G est un groupe de Lie et K est un sous-groupe compact de G, alors G/K est réductif. En effet, il existe un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ $Ad(K)$-invariant sur $\mathfrak{g}$. Le sous-espace $\mathfrak{m} = \mathfrak{k}^{\perp, \langle\ ,\ \rangle}$ est $Ad(K)$-invariant et on a la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$.

Définition 5 *La **représentation d'isotropie** d'un espace homogène $M = G/K$ est l'homomorphisme $Ad^{G/K} : K \longrightarrow GL(T_0(G/K))$ défini par $k \longmapsto (d\,\tau_k)_0$ où $0 = eK$ et τ_a $(a \in G)$ est le difféomorphisme $G/K \longrightarrow G/K$, $gK \longmapsto agK$.*

Remarque. Si G/K est un espace homogène réductif, i.e., si $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ avec $Ad^G(K)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$, alors la représentation d'isotropie de G/K est équivalente à la représentation adjointe de K sur $\mathfrak{m}$.

Définition 6 *Soit M une variété riemannienne connexe. Si pour tout $p \in M$, il existe une isométrie $j_p : M \longrightarrow M$ telle que $j_p(p) = p$ et $(d\,j_p)_p = -Id_p$, alors M est appelée un **espace riemannien symétrique**. L'application j_p est appelée une **symétrie** (globale) de M au point p.*

Théorème 2 *Toute variété riemannienne symétrique M est un espace homogène.*

Démonstration. Voir [He]. □

Pour $M = G/K$ un espace riemannien symétrique, la paire $(G\,,\,K)$ est appelée une **paire symétrique**.

Proposition 4 *Soit $M = G/K$ un espace riemannien symétrique, et soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ les algèbres de Lie respectives de G et K. Alors, il existe un automorphisme involutif σ de G tel que $\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g}\,;\, d\sigma(X) = X\}$. De plus,*
(1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ *avec* $\mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{g}\,;\, d\sigma(X) = -X\}$;
(2) *le sous-espace $\mathfrak{m}$ est $Ad(K)$-invariant (et donc $M = G/K$ est réductif)* ;
(3) *les relations suivantes sont satisfaites :*

$$[\,\mathfrak{k}\,,\,\mathfrak{m}\,] \subset \mathfrak{m}\,,\ [\,\mathfrak{k}\,,\,\mathfrak{k}\,] \subset \mathfrak{k}\,,\ [\,\mathfrak{m}\,,\,\mathfrak{m}\,] \subset \mathfrak{k}.$$

Démonstration. Voir, par exemple, $[He]$. □

2.1 Fibrés vectoriels homogènes

Définition 7 *Soient G un groupe de Lie et K un sous-groupe fermé de G. Soit $M = G/K$. Un fibré vectoriel E au dessus de M est dit* ***homogène*** *si G agit sur E à gauche et l'action de G satisfait :*
(1) *$gE_x = E_{gx}$ pour tous $x \in M$, $g \in G$.*
(2) *L'application de E_x à valeurs dans E_{gx} induite par la multiplication à gauche par g est linéaire pour $g \in G$ et $x \in M$.*

Soit $(\tau\,,\,E_0)$ une représentation irréductible de K de dimension finie. Le sous-groupe K agit sur $G \times E_0$ par $(g\,,\,v)k := (gk\,,\,\tau(k)^{-1}v)$ pour $g \in G$, $v \in E_0$ et $k \in K$. On pose $E := (G \times E_0)/K =: G \times_{K,\tau} E_0$, $[\,g\,,\,v\,] := (g\,,\,v)K$, et $p : E \longrightarrow G/K$, $[\,g\,,\,v\,] \longmapsto gK$. On montre (voir, par exemple, $[KN]$) que E est un fibré vectoriel C^∞ au dessus de M. On définit une action de G sur $G \times E_0$ par $g_0 \cdot (g\,,\,v) := (g_0 g\,,\,v)$. Ceci induit une action à gauche de G sur E définie par $g_0 \cdot [\,g\,,\,v\,] := [\,g_0 g\,,\,v\,]$. Muni de cette action, E est un fibré vectoriel homogène.

Lemme 2 *Soit E un fibré vectoriel homogène au dessus de M. On pose $E_0 = E_{eK}$ et $\tau(k)$ l'action de k sur E_0 pour $k \in K$. Alors, E est isomorphe en tant que fibré vectoriel homogène à $G \times_{K,\tau} E_0$.*

Démonstration. Soit l'application $\xi : G \times E_0 \longrightarrow E\,,\ (g\,,\,v) \longmapsto g \cdot v$. Pour $(g\,,\,v),\ (g^{'}\,,\,v^{'}) \in G \times E_0$, on observe que $\xi(g\,,\,v)$ est égal à $\xi(g^{'}\,,\,v^{'})$ si et seulement si $[\,g\,,\,v\,] = [\,g^{'}\,,\,v^{'}\,]$. Ainsi, l'application

$$\overline{\xi} : G \times_{K,\tau} E_0 \longrightarrow E\,,\ [\,g\,,\,v\,] \longmapsto g \cdot v$$

est bijective et on vérifie que $\overline{\xi}$ est un isomorphisme de fibrés vectoriels. □

Lemme 3 *Soient G un groupe de Lie et K un sous-groupe fermé de G. Soient $(\tau\,,\,E_0)$ et $(\sigma\,,\,F_0)$ deux représentations de dimensions finies de K. Soient $E = G \times_{K,\tau} E_0$ et $F = G \times_{K,\sigma} F_0$. On a*
(1) $E \oplus F \cong G \times_{K,\tau\oplus\sigma} (E_0 \oplus F_0)$,
(2) $E \otimes F \cong G \times_{K,\tau\otimes\sigma} (E_0 \otimes F_0)$.

Démonstration. Le fibré vectoriel $E \oplus F$ au dessus de M est homogène avec $(E \oplus F)_{eK} \cong E_0 \oplus F_0$. Pour $k \in K$, $v \in E_0$, et $w \in F_0$, on a

$$\begin{aligned} k([\,e\,,\,v\,] \oplus [\,e\,,\,w\,]) &= [\,k\,,\,v \oplus w\,] \\ &= [\,e\,,\,\tau(k)^{-1}v \oplus \sigma(k)^{-1}w\,] \\ &= [\,e\,,\,(\tau(k)^{-1} \oplus \sigma(k)^{-1})(v \oplus w)\,]. \end{aligned}$$

L'action de K sur $E_0 \oplus F_0$ est donc $\tau \oplus \sigma$. D'où, $E \oplus F \cong G \times_{K,\tau\oplus\sigma} (E_0 \oplus F_0)$. De même, en observant que l'action de K sur $E_0 \otimes F_0$ est $\tau \otimes \sigma$, on conclut que $E \otimes F \cong G \times_{K,\tau\otimes\sigma} (E_0 \otimes F_0)$. $\square$

Lemme 4 *Soit $(\tau\,,\, E_0)$ une représentation de dimension finie de K. Soit $\langle\ ,\ \rangle$ un produit scalaire sur E_0 tel que relativement à $\langle\ ,\ \rangle$, $(\tau\,,\, E_0)$ est une représentation unitaire de K. Alors il existe une unique structure unitaire G-invariante sur $E = G \times_{K,\tau} E_0$ telle que si on identifie E_{eK} avec E_0 de manière canonique, le produit scalaire induit sur E_0 s'identifie avec $\langle\ ,\ \rangle$.*

Démonstration. Pour $v,\, w \in E_0$ et $g \in G$, on pose

$$([\,g\,,\, v\,]\,,\,[\,g\,,\, w\,])_{gK} := \langle\, v\,,\, w\,\rangle.$$

L'application $(\ ,\ )_{gK}$ est bien définie et on vérifie facilement que $(\ ,\ )$ est une structure unitaire G-invariante sur E. Si $(\ ,\ )'$ est une autre structure unitaire G-invariante sur E de sorte que $(\ ,\ )'|_{E_0} \equiv \langle\ ,\ \rangle$, alors

$$(g[\,e\,,\, v\,]\,,\, g[\,e\,,\, w\,])'_{gK} = ([\,e\,,\, v\,]\,,\,[\,e\,,\, w\,])'_{eK} = \langle v\,,\, w\rangle,$$

i.e., $([\,g\,,\, v\,]\,,\,[\,g\,,\, w\,])'_{gK} = \langle\, v\,,\, w\,\rangle$. Il s'ensuit que $(\ ,\ )' \equiv (\ ,\ )$. $\square$

2.2 Opérateurs différentiels invariants

Définition 8 *Soient G un groupe de Lie, K un sous-groupe fermé de G, et $M = G/K$. Soient E et F deux fibrés vectoriels homogènes C^∞ au dessus de M. Un opérateur différentiel $D : \Gamma^\infty(E) \longrightarrow \Gamma^\infty(F)$ est dit **invariant** (ou **homogène**) si $g \cdot (Df) = D(g \cdot f)$ pour tout $g \in G$, où $(g \cdot f)(x) := gf(g^{-1}x)$ pour $x \in M$, $f \in \Gamma^\infty(E)$ et $g \in G$.*

Soient $(\tau\,,\, E_0)$ et $(\sigma\,,\, F_0)$ deux représentations de dimensions finies de K. Soient $E = G \times_{K,\tau} E_0$ et $F = G \times_{K,\sigma} F_0$. On note par $C^\infty(G\,,\, E_0)^{K,\tau}$ l'espace de toutes les applications C^∞, $f : G \longrightarrow E_0$, satisfaisant la relation de covariance

$$f(gk) = \tau(k)^{-1} f(g)\,,\ \text{où}\ g \in G \text{ et } k \in K.$$

Pour $f \in \Gamma^\infty(E)$, on définit $\widetilde{f} \in C^\infty(G\,,\, E_0)$ par $\widetilde{f}(g) := g^{-1} f(gK)$ pour $g \in G$, où E_0 est identifié canoniquement avec E_{eK}. On vérifie facilement que $\widetilde{f} \in C^\infty(G\,,\, E_0)^{K,\tau}$ et que l'application $A : \Gamma^\infty(E) \longrightarrow C^\infty(G\,,\, E_0)^{K,\tau}$, $f \longmapsto \widetilde{f}$, est un isomorphisme linéaire.

Soit $D : \Gamma^\infty(E) \longrightarrow \Gamma^\infty(F)$ un opérateur différentiel. On définit une application linéaire $\widetilde{D}$ sur $C^\infty(G\,,\, E_0)^{K,\tau}$ par $\widetilde{D}\widetilde{f} := \widetilde{Df}$ pour $f \in \Gamma^\infty(E)$. Notons que $\widetilde{D}(C^\infty(G\,,\, E_0)^{K,\tau}) \subset C^\infty(G\,,\, F_0)^{K,\sigma}$.

Définition 9 *Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et soient E_0 et F_0 deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Une application $\mathbb{K}$-linéaire $D : C^\infty(G\,,\, E_0) \longrightarrow C^\infty(G\,,\, F_0)$ est appelée un **opérateur différentiel invariant à gauche** si pour tout $g \in G$,*

(1) *$D \circ L_g = L_g \circ D$ avec $(L_g f)(x) := f(g^{-1}x)$ pour $f \in C^\infty(G\,,\,E_0)$ et $x \in G$;*
(2) *il existe une carte $(U\,,\,\varphi)$ autour de g telle que pour tout $f \in C^\infty(G\,,\,E_0)$,*

$$(Df)(g) = \sum_{|\alpha| \leq d} a_\alpha(g)\, \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}\, \widetilde{f}(\varphi(g))\,,$$

où $\{x_1, ..., x_n\}$ est le système de coordonnées locales dans U, $\widetilde{f} = f\big|_U \circ \varphi^{-1}$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, et $a_\alpha \in C^\infty(U\,,\,L(E_0\,,\,F_0))$.

Soit maintenant G un groupe de Lie réel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et soit $D(G)$ l'espace des opérateurs différentiels $D : C^\infty(G\,,\,\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(G\,,\,\mathbb{R})$ qui sont invariants à gauche. Pour $X \in \mathfrak{g}$, on note par X^G le champ de vecteur invariant à gauche associé à X. On définit une action de X^G sur $C^\infty(G\,,\,\mathbb{R})$ par

$$(X^G f)(g) = \frac{d}{dt}\, f(g\, exp(tX))\Big|_{t=0}.$$

En identifiant X avec X^G, on écrit simplement Xf au lieu de $X^G f$.

Lemme 5 *Soient $g \in G$, $X \in \mathfrak{g}$ et $f \in C^\infty(G\,,\,\mathbb{R})$. On a*

$$(X^k f)(g) = \frac{d^k}{dt^k}\, f(g\, exp(tX))\Big|_{t=0}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Démonstration. La formule du lemme est clairement satisfaite si $k = 1$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} (X^{k+1} f)(g\, exp(tX)) &= X(X^k f)(g\, exp(tX)) \\ &= \frac{d}{ds}\,(X^k f)(g\, exp((s+t)X))\Big|_{s=0} \\ &= \frac{d}{dt}\,(X^k f)(g\, exp(tX)). \end{aligned}$$

Par itération, on trouve que $(X^{k+1} f)(g\, exp(tX)) = \dfrac{d^{k+1}}{dt^{k+1}}\, f(g\, exp(tX))$. En évaluant en $t = 0$, on obtient

$$(X^{k+1} f)(g) = \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}}\, f(g\, exp(tX))\Big|_{t=0}.$$

Ceci achève la démonstration du lemme. □

Lemme 6 *Soient $g \in G$, $\{X_1, ..., X_n\}$ une base de $\mathfrak{g}$, et $f \in C^\infty(G\,,\,\mathbb{R})$. Alors,*

$$(X_1 ... X_n f)(g) = \frac{\partial^n}{\partial t_1 ... \partial t_n}\, f(g\, exp(tX_1) ... exp(t_n X_n))\Big|_0.$$

Démonstration. Soit F la fonction $(t_1, ..., t_n) \longmapsto f(g\, exp(t_1 X_1) ... exp(t_n X_n))$ définie dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$). Pour $|t_1|, ..., |t_{n-1}|$ assez petits, on a

$$\frac{\partial}{\partial t_n}\, F(t_1, ..., t_{n-1}, t_n)\Big|_{t_n=0} = (X_n f)(g\, exp(t_1 X_1) ... exp(t_{n-1} X_{n-1})).$$

Par itération, on obtient la formule du lemme. □

Remarque. Si $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et si $f \in C^\infty(G\,,\,\mathbb{R})$, alors

$$(X_1^{\alpha_1}...X_n^{\alpha_n} f)(g) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial t_1^{\alpha_1}...\partial t_n^{\alpha_n}} f(g\, exp(tX_1)...exp(t_n X_n))\Big|_0\,,$$

où $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

Définition 10 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps $\mathbb{K}$. Soit $T(\mathfrak{g})$ l'algèbre tensorielle sur $\mathfrak{g}$, et soit $I(\mathfrak{g})$ l'idéal bilatère engendré par les éléments de la forme $X \otimes Y - Y \otimes X - [X\,,\,Y]$ pour $X,\, Y \in \mathfrak{g}$. On identifie $\mathfrak{g}$ avec son image dans $T(\mathfrak{g})$. Soit $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/I(\mathfrak{g})$. Alors, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est une algèbre associative unifère. Soit ξ l'application naturelle de $T(\mathfrak{g})$ dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. En posant $\sigma = \xi\big|_{\mathfrak{g}}$, on obtient que $\sigma([X\,,\,Y]) = \sigma(X)\sigma(Y) - \sigma(Y)\sigma(X)$ pour tous $X,\, Y \in \mathfrak{g}$. La paire $(\mathcal{U}(\mathfrak{g})\,,\,\sigma)$ est appelée* ***l'algèbre universelle enveloppante****.*

Les sous-espaces $\mathcal{U}^i(\mathfrak{g}) := \xi(T^i(\mathfrak{g}))$, où $T^i(\mathfrak{g}) := \bigoplus_{k\le i} \bigotimes^k \mathfrak{g}$, définissent une filtration de l'algèbre associative $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Soit l'application $j\,:\,\mathfrak{g} \longrightarrow D(G)$, $X \longmapsto j(X) = X^G$. Par universalité de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, j s'étend en un homomorphisme d'algèbres associatives de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ dans $D(G)$ que l'on note aussi j. Pour $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ un multi-indice, on pose $X^\alpha = X_1^{\alpha_1}...X_n^{\alpha_n}$. Par la suite, on montre que les $j(X^\alpha)$ forment une base de $D(G)$.

Lemme 7 *Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, il existe une fonction $h_\alpha \in C^\infty(G\,,\,\mathbb{R})$ telle que pour tout $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n) \in \mathbb{N}^n$, on a*

$$\{j(X)^\alpha h_\beta\}(e) = \begin{cases} c_\alpha \neq 0 & si\ \alpha = \beta, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Démonstration. Soit $(U\,,\,\varphi)$ une carte autour de l'élément neutre e dans G telle que $\varphi(exp(t_1X_1)...exp(t_nX_n)) = (t_1, ..., t_n)$ (on peut toujours trouver une telle carte dans G). On écrit $\varphi = (t_1, ..., t_n)$. Soit $f \in C^\infty(G\,,\,\mathbb{R})$ une fonction à support compact dans U telle que $f(x) = t_1(x)^{\alpha_1}...t_n(x)^{\alpha_n}$ dans un voisinage de e. Alors,

$$f(exp(t_1X_1)...exp(t_nX_n)) = t_1^{\alpha_1}...t_n^{\alpha_n}\,.$$

On en déduit que

$$\{j(X)^\beta f\}(e) = \begin{cases} \alpha\,! & \text{si } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

ce qui prouve le lemme. □

Il s'ensuit que les $j(X^\alpha)$ sont linéairement indépendants dans $D(G)$ et que l'application j est injective.

Lemme 8 *Les $j(X^\alpha)$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, engendrent $D(G)$.*

Démonstration. Soit $D \in D(G)$. Pour $f \in C^\infty(G\,,\mathbb{R})$, on note $D_e f = (Df)(e)$. L'application D_e détermine complètement l'opérateur D. Considérons une carte $(U\,,\,\varphi)$ autour de e telle que $\varphi(exp(t_1X_1)...exp(t_nX_n)) = (t_1,...,t_n)$. Pour $f \in C^\infty(G\,,\mathbb{R})$, on a

$$(Df)\big|_U = \sum_{|\alpha|\le d} a_\alpha \,\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial t_1^{\alpha_1}...\partial t_n^{\alpha_n}}\,\widetilde{f}\circ\varphi\,,$$

avec $\widetilde{f} = f\big|_U \circ \varphi^{-1}$ et $a_\alpha \in C^\infty(U\,,\mathbb{R})$. On en déduit que

$$(Df)(e) = \sum_{|\alpha|\le d} a_\alpha(e)\{j(X_1)^{\alpha_1}...j(X_n)^{\alpha_n} f\}(e)\,.$$

Comme $j(X_1)^{\alpha_1},...,j(X_n)^{\alpha_n}$ sont invariants à gauche, les a_α le sont aussi et donc $a_\alpha \equiv a_\alpha(e) =: c_\alpha$. Par conséquent,

$$D = \sum_{|\alpha|\le d} c_\alpha\, j(X_1)^{\alpha_1}...j(X_n)^{\alpha_n}\,.$$

Ainsi, les opérateurs $j(X)^\alpha = j(X_1)^{\alpha_1}...j(X_n)^{\alpha_n}$ engendrent $D(G)$. □

Théorème 3 *L'algèbre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est isomorphe à $D(G)$.*

Démonstration. L'application $j : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow D(G)$ est un homomorphisme d'algèbres associatives injectif. De plus, la famille $\{j(X)^\alpha\,;\,\alpha \in \mathbb{N}^n\}$ engendre $D(G)$, ce qui montre que j est surjectif. On conclut donc que $j : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow D(G)$ est un isomorphisme d'algèbres associatives. □

Soient G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et K un sous-groupe fermé de G. Soient $(\tau\,,\,E_0)$ et $(\sigma\,,\,F_0)$ deux représentations de dimensions finies de K. Soient $E = G\times_{K,\tau}E_0$ et $F = G\times_{K,\sigma}F_0$ les fibrés homogènes associés. A chaque opérateur différentiel invariant, $D : \Gamma^\infty(E) \longrightarrow \Gamma^\infty(F)$, on associe un opérateur différentiel invariant à gauche, $\widetilde{D} : C^\infty(G\,,\,E_0)^{K,\tau} \longrightarrow C^\infty(G\,,\,F_0)^{K,\sigma}$, donné par $\widetilde{D}\widetilde{f} := \widetilde{Df}$, où $f \in \Gamma^\infty(E)$ et $\widetilde{f} \in C^\infty(G\,,\,E_0)^{K,\tau}$ sont comme ci-dessus. Observons que $f(gK) = [\,g\,,\,\widetilde{f}(g)\,]$ pour tout $g \in G$. De plus, l'application $D \longmapsto \widetilde{D}$ ainsi définie est une bijection linéaire.

Soit $L(E_0\,,\,F_0)$ l'espace des applications linéaires de E_0 à valeurs dans F_0. Pour $L \in L(E_0\,,\,F_0)$, $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ et $f \in C^\infty(G\,,\,E_0)$, on pose

$$(L\otimes X)f := L(Xf).$$

On associe donc à chaque élément de $L(E_0\,,\,F_0)\otimes\mathcal{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ un opérateur différentiel de $C^\infty(G\,,\,E_0)$ à valeurs dans $C^\infty(G\,,\,F_0)$. On définit une action μ de K sur $L(E_0\,,\,F_0)\otimes\mathcal{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ par

$$\mu(k)(L\otimes X) := \sigma(k)L\tau(k)^{-1}\otimes Ad(k)X$$

pour $k \in K$, $L \in L(E_0\,,\,F_0)$ et $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$. Alors, $(\mu\,,\,L(E_0\,,\,F_0)\otimes\mathcal{U}^j(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}))$ est une représentation de K pour chaque $j \in \mathbb{N}$. Posons

$$(L(E_0\,,\,F_0)\otimes\mathcal{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}))^K := \{\overline{D} \in L(E_0\,,\,F_0)\otimes\mathcal{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})\,;\,\mu(k)\,\overline{D} = \overline{D}\,,\,\forall\, k \in K\}.$$

Lemme 9 *(i) Si* $\overline{D} \in (L(E_0\,,\,F_0) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}))^K$ *, alors*

$$\overline{D}(C^\infty(G\,,\,E_0)^{K,\tau}) \subset C^\infty(G\,,\,F_0)^{K,\sigma}\,.$$

(ii) Si $\overline{D} \in L(E_0\,,\,F_0) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ *et si* $\overline{D}(C^\infty(G\,,\,E_0)^{K,\tau}) \subset C^\infty(G\,,\,F_0)^{K,\sigma}$ *, alors*

$$(\mu(k)\,\overline{D})\big|_{C^\infty(G\,,\,E_0)^{K,\tau}} = \overline{D}\big|_{C^\infty(G\,,\,E_0)^{K,\tau}}\,.$$

Démonstration. (i) Soit $\overline{D} = \sum_{|\alpha|\leq d} L_\alpha \otimes X^\alpha \in (L(E_0\,,\,F_0) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}))^K$ avec $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et $X^\alpha = X_1^{\alpha_1}...X_n^{\alpha_n}$, où $\{X_1, ..., X_n\}$ est une base de $\mathfrak{g}$. Pour $t = (t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^\alpha := \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial t_1^{\alpha_1}...\partial t_n^{\alpha_n}}$. Fixons un élément $f \in C^\infty(G\,,\,E_0)^{K,\tau}$. On a

$$\begin{aligned}
(\overline{D}f)(gk) &= \sum_{|\alpha|\leq d} L_\alpha (X^\alpha f)(gk) \\
&= \sum_{|\alpha|\leq d} L_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\alpha f(gk\,exp(t_1X_1)...exp(t_nX_n))\Big|_0 \\
&= \sum_{|\alpha|\leq d} L_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\alpha f(g\,exp(t_1Ad(k)X_1)...exp(t_nAd(k)X_n)k)\Big|_0 \\
&= \sum_{|\alpha|\leq d} L_\alpha \tau(k)^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\alpha f(g\,exp(t_1Ad(k)X_1)...exp(t_nAd(k)X_n))\Big|_0 \\
&= \sum_{|\alpha|\leq d} L_\alpha \tau(k)^{-1}\{(Ad(k)X^\alpha)f\}(g) \\
&= \sigma(k)^{-1} \sum_{|\alpha|\leq d} \{(\sigma(k)L_\alpha\tau(k)^{-1} \otimes Ad(k)X^\alpha)f\}(g) \\
&= \sigma(k)^{-1}\{(\mu(k)\,\overline{D})f\}(g) \\
&= \sigma(k)^{-1}(\overline{D}f)(g).
\end{aligned}$$

Ceci prouve que $\overline{D}(C^\infty(G\,,\,E_0)^{K,\tau}) \subset C^\infty(G\,,\,F_0)^{K,\sigma}$.

(ii) Soit $\overline{D} = \sum_{|\alpha|\leq d} L_\alpha \otimes X^\alpha \in L(E_0\,,\,F_0) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ $(\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n)$ tel que $\overline{D}(C^\infty(G\,,\,E_0)^{K,\tau}) \subset C^\infty(G\,,\,F_0)^{K,\sigma}$. Soit $f \in C^\infty(G\,,\,E_0)^{K,\tau}$. On a

$$\begin{aligned}
(\{\mu(k)\,\overline{D}\}f)(g) &= \sum_{|\alpha|\leq d} \{(\sigma(k)L_\alpha\tau(k)^{-1} \otimes Ad(k)X^\alpha)f\}(g) \\
&= \sigma(k) \sum_{|\alpha|\leq d} \{(L_\alpha \otimes X^\alpha)f\}(gk) \\
&= \sigma(k)(\overline{D}f)(gk) \\
&= (\overline{D}f)(g).
\end{aligned}$$

On conclut que $(\mu(k)\,\overline{D})\big|_{C^\infty(G\,,\,E_0)^{K,\tau}} = \overline{D}\big|_{C^\infty(G\,,\,E_0)^{K,\tau}}$. □

Proposition 5 *Soient G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et K un sous-groupe fermé de G. Soient $E = G \times_{K,\tau} E_0$ et $F = G \times_{K,\sigma} F_0$ deux fibrés vectoriels homogènes au dessus de $M = G/K$.*

(i) Si $D : \Gamma^\infty(E) \longrightarrow \Gamma^\infty(F)$ est un opérateur différentiel invariant d'ordre d et si $\widetilde{D} : C^\infty(G\,,\,E_0)^{K,\tau} \longrightarrow C^\infty(G\,,\,F_0)^{K,\sigma}$ est l'opérateur correspondant, alors il existe un élément $\overline{D} \in L(E_0\,,\,F_0) \otimes \mathcal{U}^d(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ tel que $\overline{D}\big|_{C^\infty(G\,,\,E_0)^{K,\tau}} = \widetilde{D}$.
(ii) Si K est compact, alors on peut choisir dans (i) $\overline{D} \in (L(E_0\,,\,F_0) \otimes \mathcal{U}^d(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}))^K$.

Démonstration. (i) Considérons une base $\{X_1, ..., X_n\}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et fixons un élément $f \in C^\infty(G\,,\,E_0)$. En tant qu'opérateur différentiel de $C^\infty(G\,,\,E_0)$ à valeurs dans $C^\infty(G\,,\,F_0)$, $\widetilde{D}$ satisfait

$$(\widetilde{D}f)(e) = \sum_{|\alpha| \leq d} L_\alpha\,(X^\alpha f)(e)\,,$$

avec $L_\alpha \in L(E_0\,,\,F_0)$. Comme $\widetilde{D}$ est invariant à gauche, on en déduit que

$$(\widetilde{D}f)(g) = \sum_{|\alpha| \leq d} L_\alpha\,(X^\alpha f)(g)$$

pour tout $g \in G$. L'élément

$$\overline{D} := \sum_{|\alpha| \leq d} L_\alpha \otimes X^\alpha \in L(E_0\,,\,F_0) \otimes \mathcal{U}^d(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$$

satisfait la condition $\overline{D}\big|_{C^\infty(G\,,\,E_0)^{K,\tau}} = \widetilde{D}$. Ceci prouve le point (i).

(ii) Supposons que K est compact. Soit $\overline{D} := \sum_{|\alpha| \leq d} L_\alpha \otimes X^\alpha$ l'élément de $L(E_0\,,\,F_0) \otimes \mathcal{U}^d(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ obtenu dans (i). Posons $D_1 = \int_K (\mu(k)\,\overline{D})\,dk$. Il est clair que $D_1 \in (L(E_0\,,\,F_0) \otimes \mathcal{U}^d(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}))^K$. De plus, comme

$$\overline{D}\,(C^\infty(G\,,\,E_0)^{K,\tau}) \subset C^\infty(G\,,\,F_0)^{K,\sigma}\,,$$

on obtient que

$$\mu(k)\,\overline{D}\big|_{C^\infty(G\,,\,E_0)^{K,\tau}} = \overline{D}\big|_{C^\infty(G\,,\,E_0)^{K,\tau}}\,.$$

Ceci implique que $D_1\big|_{C^\infty(G\,,\,E_0)^{K,\tau}} = \overline{D}\big|_{C^\infty(G\,,\,E_0)^{K,\tau}} = \widetilde{D}$. $\square$

Supposons maintenant que G est compact et $M = G/K$ est orientable. Notons ω l'élément de volume G-invariant choisi de sorte que

$$\int_M f\,\omega = \int_G f(gK)\,dg$$

pour tout $f \in C(M)$. Soit $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ l'algèbre de Lie complexifiée de $\mathfrak{g}$. Soit pour $X = X_1 + \sqrt{-1}\,X_2$ $(X_1,\ X_2 \in \mathfrak{g})$, $\delta(X) = -X_1 + \sqrt{-1}\,X_2$. On étend δ en un anti-automorphisme de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$, i.e., $\delta : \mathcal{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ est $\mathbb{R}$-linéaire et satisfait $\delta(xy) = \delta(y)\delta(x)$. Pour $L \in L(E_0\,,\,F_0)$, on pose $\eta(L) = L^*$.

Lemme 10 *Si $\overline{D} \in L(E_0\,,\,F_0) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$, alors l'adjoint formel de $\overline{D}$ en tant qu'opérateur différentiel de $C^\infty(G\,,\,E_0)$ à valeurs dans $C^\infty(G\,,\,F_0)$ est*

$$(\overline{D})^* = (\eta \otimes \delta) \circ \overline{D}.$$

Démonstration. Il suffit de prouver le résultat du lemme pour $\overline{D} = L \otimes X$ avec $L \in L(E_0\,,\,F_0)$ et $X = X_1 + \sqrt{-1}\,X_2 \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ ($X_1,\,X_2 \in \mathfrak{g}$). Soient $f \in C^\infty(G\,,\,E_0)$ et $h \in C^\infty(G\,,\,F_0)$. On a

$$\begin{aligned}
\int_G \langle\,(\overline{D}f)(g)\,,\,h(g)\,\rangle\,dg &= \int_G \langle\,(L\otimes X)f(g)\,,\,h(g)\,\rangle\,dg \\
&= \int_G \langle\,L(Xf)(g)\,,\,h(g)\,\rangle\,dg \\
&= \int_G \langle\,(Xf)(g)\,,\,L^*h(g)\,\rangle\,dg \\
&= \int_G \langle\,f(g)\,,\,L^*(-X_1+\sqrt{-1}\,X_2)h(g)\,\rangle\,dg.
\end{aligned}$$

Ainsi, on conclut que $(\overline{D})^* = (\eta\otimes\delta)\circ\overline{D}$. □

Proposition 6 *Soit $D : \Gamma^\infty(E) \longrightarrow \Gamma^\infty(F)$ un opérateur différentiel invariant et soit D^* son adjoint formel. Alors, $D^* : \Gamma^\infty(F) \longrightarrow \Gamma^\infty(E)$ est aussi un opérateur différentiel invariant. Soit $\overline{D} \in L(E_0\,,\,F_0)\otimes\mathcal{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ un élément associé à D comme dans la Prop. 5, partie (i), et soit $(\overline{D})^*$ l'adjoint formel de $\overline{D}$ en tant qu'opérateur différentiel de $C^\infty(G\,,\,E_0)$ à valeurs dans $C^\infty(G\,,\,F_0)$. Alors, $(\overline{D})^* \in L(F_0\,,\,E_0)\otimes\mathcal{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ et $(\overline{D})^* = \overline{D^*}$.*

Démonstration. Pour $f_1\,,\,f_2 \in \Gamma^\infty(F)$ et $g_0 \in G$, on a

$$\int_{G/K} \langle\,f_1\,,\,g_0\,f_2\,\rangle\,\omega = \int_G \langle\,\widetilde{f_1}(g)\,,\,\widetilde{g_0\,f_2}(g)\,\rangle\,dg\,,$$

où $f_1(gK) = [\,g\,,\,\widetilde{f_1}(g)\,]$ et $f_2(gK) = [\,g\,,\,\widetilde{f_2}(g)\,]$ pour tout $g \in G$. Par suite,

$$\begin{aligned}
\int_{G/K} \langle\,f_1\,,\,g_0\,f_2\,\rangle\,\omega &= \int_G \langle\,\widetilde{f_1}(g)\,,\,\widetilde{f_2}(g_0^{-1}g)\,\rangle\,dg \\
&= \int_G \langle\,\widetilde{g_0^{-1}f_1}(g)\,,\,\widetilde{f_2}(g)\,\rangle\,dg \\
&= \int_{G/K} \langle\,g_0^{-1}f_1\,,\,f_2\,\rangle\,\omega\,.
\end{aligned}$$

Soient $f \in \Gamma^\infty(E)$, $h \in \Gamma^\infty(F)$ et $g \in G$. On a

$$\begin{aligned}
\int_{G/K} \langle\,f\,,\,D^*(gh)\,\rangle\,\omega &= \int_{G/K} \langle\,Df\,,\,g\,h\,\rangle\,\omega \\
&= \int_{G/K} \langle\,g^{-1}(Df)\,,\,h\,\rangle\,\omega \\
&= \int_{G/K} \langle\,D(g^{-1}f)\,,\,h\,\rangle\,\omega \\
&= \int_{G/K} \langle\,g^{-1}f\,,\,D^*h\,\rangle\,\omega \\
&= \int_{G/K} \langle\,f\,,\,g(D^*h)\,\rangle\,\omega\,.
\end{aligned}$$

Ceci implique que $D^*(gh) = g(D^*h)$ pour tout $g \in G$ et tout $h \in \Gamma^\infty(F)$. Par conséquent, $D^* : \Gamma^\infty(F) \longrightarrow \Gamma^\infty(E)$ est un opérateur différentiel invariant.

Considérons toujours $f \in \Gamma^\infty(E)$ et $h \in \Gamma^\infty(F)$ avec $f(gK) = [\,g\,,\,\widetilde{f}(g)\,]$, et $h(gK) = [\,g\,,\,\widetilde{h}(g)\,]$ pour tout $g \in G$. Si $\{X_1, ..., X_n\}$ est une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G, alors $\widetilde{D}\widetilde{f}$ a pour expression

$$(\widetilde{D}\widetilde{f})(g) = \sum_{|\alpha| \leq d} L_\alpha (X^\alpha \widetilde{f})(g)$$

pour tout $g \in G$, où $L_\alpha \in L(E_0\,,\,F_0)$ et $X^\alpha = X_1^{\alpha_1} ... X_n^{\alpha_n}$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\int_{G/K} \langle\, Df\,,\,h\,\rangle\,\omega &= \int_G \langle\,(\widetilde{Df})(g)\,,\,\widetilde{h}(g)\,\rangle\,dg \\
&= \int_G \langle\,(\widetilde{D}\widetilde{f})(g)\,,\,\widetilde{h}(g)\,\rangle\,dg \\
&= \sum_{|\alpha|\leq d} \int_G \langle\, L_\alpha (X^\alpha \widetilde{f})(g)\,,\,\widetilde{h}(g)\,\rangle\,dg \\
&= \sum_{|\alpha|\leq d} \int_G \langle\,\widetilde{f}(g)\,,\,L_\alpha^*(\delta(X^\alpha)\widetilde{h})(g)\,\rangle\,dg \\
&= \int_G \langle\,\widetilde{f}(g)\,,\,\sum_{|\alpha|\leq d} \eta(L_\alpha)(\delta(X^\alpha)\widetilde{h})(g)\,\rangle\,dg.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\int_{G/K} \langle\, Df\,,\,h\,\rangle\,\omega &= \int_{G/K} \langle\, f\,,\,D^*h\,\rangle\,\omega \\
&= \int_G \langle\,\widetilde{f}(g)\,,\,(\widetilde{D^*}\widetilde{h})(g)\,\rangle\,dg.
\end{aligned}$$

On en déduit que $(\widetilde{D^*}\widetilde{h})(g) = \sum_{|\alpha|\leq d} \eta(L_\alpha)(\delta(X^\alpha)\widetilde{h})(g)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\overline{D^*} &= \sum_{|\alpha|\leq d} \eta(L_\alpha) \otimes \delta(X^\alpha) \\
&= (\eta \otimes \delta)\Big(\sum_{|\alpha|\leq d} L_\alpha \otimes X^\alpha\Big) \\
&= (\eta \otimes \delta)\,\overline{D} \\
&= (\overline{D})^*\,.
\end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration de la proposition. $\square$

Soit G un groupe de Lie compact connexe et soit $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Fixons sur $\mathfrak{g}$ un produit scalaire $\langle\;,\;\rangle$ G-invariant et considérons une base orthonormée $\{X_1, ..., X_n\}$ de $\mathfrak{g}$ relativement à $\langle\;,\;\rangle$. L'élément $\Omega_{_G} = -\sum_{j=1}^n X_j^2 \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ est appelé **l'élément de Casimir** de G relativement au produit scalaire $\langle\;,\;\rangle$ sur $\mathfrak{g}$.

Proposition 7 *L'élément $\Omega_{_G}$ est indépendant du choix d'une base orthonormée de $\mathfrak{g}$ (mais dépend évidemment du choix de $\langle\ ,\ \rangle$ sur $\mathfrak{g}$). De plus, $\Omega_{_G}$ est un élément du centre de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$.*

Démonstration. Si $\{Y_1, ..., Y_n\}$ est une autre base orthonormée de $\mathfrak{g}$, alors $Y_i = \sum_j a_{i,j}\, X_j$ avec $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice satisfaisant $A^t = A^{-1}$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\sum_i Y_i^2 &= \sum_{i,j,k} a_{j,i}\, a_{k,i}\, X_j X_k \\ &= \sum_{j,k} \delta_{j,k}\, X_j X_k \\ &= -\,\Omega_{_G}\,.\end{aligned}$$

Soit $g = exp(tY)$ avec $Y \in \mathfrak{g}$. Puisque $\Omega_{_G}$ est $Ad(g)$-invariant, on écrit

$$\Omega_{_G} = -\sum (e^{t\, ad(Y)} X_k)(e^{t\, ad(Y)} X_k).$$

En dérivant par rapport à t et en évaluant en $t = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}0 &= -\sum (ad(Y)X_k)X_k + X_k(ad(Y)X_k) \\ &= -\sum (Y\, X_k^2 - X_k^2\, Y) \\ &= [\,Y\,,\, \Omega_{_G}].\end{aligned}$$

D'où $\Omega_{_G}$ est central dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$. □

3 Décomposition de l'espace des sections d'un fibré homogène

Soient G un groupe de Lie compact et K un sous-groupe fermé de G. Supposons que $M = G/K$ est orientable et choisissons un élément de volume G-invariant ω sur M tel que

$$\int_M f\, \omega = \int_G f(gK)\, dg$$

pour tout $f \in C(M)$. Soit $(\tau\,,\, E_0)$ une représentation de dimension finie de K. Fixons un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ sur E_0 tel que relativement à $\langle\ ,\ \rangle$, $(\tau\,,\, E_0)$ est une représentation unitaire de K. Soit $E = G \times_{K,\tau} E_0$ le fibré vectoriel homogène associé au dessus de M. On désigne par $\Gamma(E)$ (resp. $L^2(E)$) l'espace des sections continues (resp. de carré intégrable) de E. Sur $\Gamma(E)$, on dispose d'un produit scalaire $(\ ,\ )$ donné par

$$\begin{aligned}(\,f_1\,,\, f_2\,) &= \int_M \langle\, f_1\,,\, f_2\,\rangle\, \omega \\ &= \int_G \langle\, f_1(gK)\,,\, f_2(gK)\,\rangle\, dg\,,\end{aligned}$$

où $f_1\,,\, f_2 \in \Gamma(E)$. On définit une action π de G sur $\Gamma(E)$ par

$$(\pi(g)f)(x) := gf(g^{-1}x) \ \text{ pour } g \in G,\ f \in \Gamma(E) \text{ et } x \in M.$$

La paire $(\pi\,,\,\Gamma(E))$ s'étend en une représentation $(\pi\,,\,L^2(E))$ de G.

On se propose dans cette section d'étudier la décomposition en G-sous modules irréductibles de $\Gamma(E)$ et $L^2(E)$.

Rappelons que l'application $A\,:\,\Gamma(E)\longrightarrow C(G\,,\,E_0)^{K,\tau}\,,\ f\longmapsto \widetilde{f}$, où $f(gK)=[\,g\,,\,\widetilde{f}(g)\,]$ $(g\in G)$, est un isomorphisme linéaire. Soit $\widehat{G}$ le dual unitaire de G (on identifiera parfois une représentation unitaire irréductible de G avec sa classe d'équivalence). Soit, pour $\gamma\in\widehat{G}$, $(\pi_\gamma\,,\,V_\gamma)$ un représentant de γ. On définit une application

$$A_\gamma : V_\gamma\otimes Hom_K(V_\gamma\,,\,E_0)\longrightarrow C(G\,,\,E_0)^{K,\tau}$$

par

$$A_\gamma(v\otimes L)(g):=L(\pi_\gamma(g)^{-1}v).$$

On a le suivant fait standard :

Lemme 11 *L'image de l'application linéaire injective*

$$\bigoplus_{\gamma\in\widehat{G}} V_\gamma\otimes V_\gamma^*\longrightarrow C(G),\ v\otimes\varphi\longmapsto F_{v,\varphi}$$

donnée par $F_{v,\varphi}(g)=\varphi(\pi_\gamma(g)^{-1}v)$ *pour* $v\in V_\gamma$, $\varphi\in V_\gamma^*$ $(\gamma\in\widehat{G})$ *et* $g\in G$, *est dense dans* $C(G)$ *par rapport à la topologie de la norme uniforme* ($\|f\|_\infty=\underset{x\in G}{Sup}\,|f(x)|$).

Démonstration. Voir [Wa]. □

Remarques. (1) Soient $\gamma\in\widehat{G}$, $v\in V_\gamma$, et $\varphi\in V_\gamma^*$. Soient g_1 et g_2 deux éléments fixés de G. Pour tout $g\in G$, on a l'égalité

$$F_{v,\varphi}(g_1^{-1}gg_2)=F_{\pi_\gamma(g_1)(v),\pi_\gamma^*(g_2)\varphi}(g)\,,$$

où π_γ^* dénote la représentation duale de π_γ.

(2) Du lemme précédent, on déduit que $\bigoplus_{\gamma\in\widehat{G}} V_\gamma\otimes V_\gamma^*\otimes E_0$ est dense dans $C(G\,,\,E_0)$ par rapport à la topologie de la norme uniforme.

Lemme 12 *L'ensemble* $C(G\,,\,E_0)^{K,\tau}$ *est fermé dans* $C(G\,,\,E_0)$ *par rapport à la topologie de la norme uniforme.*

Démonstration. Soit $(f_n)_n$ une suite dans $C(G\,,\,E_0)^{K,\tau}$ telle que $f_n\underset{n\longrightarrow\infty}{\overset{\|\cdot\|_\infty}{\longrightarrow}} f$, i.e., $\underset{x\in G}{\mathrm{Sup}}\,\|f_n(x)-f(x)\|\underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow}0$. Pour $x\in G$ et $k\in K$, on a

$$\begin{aligned}\|f(xk)-\tau(k)^{-1}f(x)\| &\le \underset{y\in G}{\mathrm{Sup}}\,\|f(yk)-\tau(k)^{-1}f(y)\|\\ &\le \underset{y\in G}{\mathrm{Sup}}\,\|f(yk)-f_n(yk)\|+\underset{y\in G}{\mathrm{Sup}}\,\|\tau(k)^{-1}(f_n(y)-f(y))\|\\ &\le 2\,\underset{y\in G}{\mathrm{Sup}}\,\|f(y)-f_n(y)\|\underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow}0.\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient que $f \in C(G\,,\,E_0)^{K,\tau}$. $\square$

Remarque. Si $\Gamma(E)$ et $C(G\,,\,E_0)^{K,\tau}$ sont munis de leurs topologies de la norme uniforme, alors l'application $A : \Gamma(E) \longrightarrow C(G\,,\,E_0)^{K,\tau}$ est un isomorphisme $\big($sur $\Gamma(E)$, on définit $\|f\|^2_{E,\infty} := \operatorname*{Sup}_{x\in G/K} \langle\, f(x)\,,\, f(x)\,\rangle_{E_x}\big)$.

Théorème 4 *L'espace* $\bigoplus_{\gamma\in\widehat{G}} A_\gamma(V_\gamma \otimes Hom_K(V_\gamma\,,\,E_0))$ *est dense dans* $C(G\,,\,E_0)^{K,\tau}$ *par rapport à la topologie de la norme uniforme.*

Démonstration. On sait déjà que $\bigoplus_{\gamma\in\widehat{G}} V_\gamma \otimes V_\gamma^* \otimes E_0$ est dense dans $C(G\,,\,E_0)$ par rapport à la topologie de la norme uniforme. On définit l'application suivante :

$$T : C(G\,,\,E_0) \longrightarrow C(G\,,\,E_0)\,,\ (Tf)(g) = \int_K \tau(k) f(gk)\,dk$$

pour tout $g \in G$. Notons que

$$\begin{array}{rcl} \|T(f)\|_\infty & = & \operatorname*{Sup}_{g\in G} \|T(f)(g)\| \\ & \leq & \displaystyle\int_K \operatorname*{Sup}_{g\in G} \|f(gk)\|\,dk \\ & \leq & \mu(K)\,\|f\|_\infty \end{array}$$

$(\mu(K) \leq 1)$. Ceci montre que T est continue et que $\|T\| \leq 1$.

Soient $f \in C(G\,,\,E_0)$ et $l \in K$. On a

$$\begin{array}{rcl} (Tf)(gl) & = & \displaystyle\int_K \tau(k) f(glk)\,dk \\ & = & \tau(l)^{-1} \displaystyle\int_K \tau(lk) f(glk)\,dk \\ & = & \tau(l)^{-1} \displaystyle\int_K \tau(k) f(k)\,dk \\ & = & \tau(l)^{-1} (Tf)(g) \end{array}$$

pour tout $g \in G$. Ainsi, $Tf \in C(G\,,\,E_0)^{K,\tau}$ et donc $Im\,T \subset C(G\,,\,E_0)^{K,\tau}$.

Soit $f \in C(G\,,\,E_0)^{K,\tau}$. Il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\bigoplus_{\gamma\in\widehat{G}} V_\gamma \otimes V_\gamma^* \otimes E_0$ telle que $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$. Observons que $Tf = f$ et que

$$\|T(f_n) - f\|_\infty = \|T(f_n - f)\|_\infty \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit que $\bigoplus_{\gamma\in\widehat{G}} T(V_\gamma \otimes V_\gamma^* \otimes E_0)$ est dense dans $C(G\,,\,E_0)^{K,\tau}$ par rapport à $\|\,.\,\|_\infty$. Posons l'application

$$p_K : V_\gamma^* \otimes E_0 \longrightarrow V_\gamma^* \otimes E_0\,,\ \ L \longmapsto \int_K \tau(k) L \pi_\gamma(k)^{-1}\,dk.$$

On vérifie facilement que

$$p_K(V_\gamma^* \otimes E_0) \subset (V_\gamma^* \otimes E_0)^K \cong Hom_K(V_\gamma\,,\,E_0).$$

De plus, pour $L \in Hom_K(V_\gamma\,,\,E_0)$, on a que $p_K(L) = L$. D'où,

$$p_K(V_\gamma^* \otimes E_0) \cong Hom_K(V_\gamma\,,\,E_0).$$

En remarquant que l'action de T sur $V_\gamma^* \otimes E_0$ coïncide avec celle de p_K, on conclut que

$$T(V_\gamma \otimes V_\gamma^* \otimes E_0) = V_\gamma \otimes p_K(V_\gamma^* \otimes E_0) \cong V_\gamma \otimes Hom_K(V_\gamma\,,\,E_0).$$

Ainsi, $\bigoplus_{\gamma \in \widehat{G}} A_\gamma(V_\gamma \otimes Hom_K(V_\gamma\,,\,E_0))$ est dense dans $C(G\,,\,E_0)^{K,\tau}$ par rapport à la topologie de la norme uniforme. $\square$

Comme conséquence immédiate du Théorème 4, on obtient :

Corollaire 1 *L'espace* $\bigoplus_{\gamma \in \widehat{G}} A^{-1}(A_\gamma(V_\gamma \otimes Hom_K(V_\gamma\,,\,E_0)))$ *est dense dans* $\Gamma(E)$ *par rapport à la topologie de la norme uniforme.*

Soit maintenant $\widetilde{\pi}$ l' action de G sur $C^\infty(G\,,\,E_0)^{K,\tau}$ définie par

$$(\,\widetilde{\pi}(g_0)f\,)(g) := f(g_0^{-1}g) \quad \text{pour } g_0,\ g \in G \text{ et } f \in C^\infty(G\,,\,E_0)^{K,\tau}.$$

Notons que $C^\infty(G\,,\,E_0)^{K,\tau}$ est équipé d'un produit scalaire $(\ ,\ )$ donné par

$$(\,f_1\,,\,f_2\,) := \int_G \langle\, f_1(g)\,,\,f_2(g)\,\rangle\, dg \quad \text{pour } f_1,\ f_2 \in C^\infty(G\,,\,E_0)^{K,\tau}.$$

L'action $\widetilde{\pi}$ s'étend en une représentation $(\widetilde{\pi}\,,\,L^2(G\,,\,E_0)^{K,\tau})$ de G appelée la **représentation induite** et notée par $Ind_K^G(\tau)$. On montre facilement le lemme suivant :

Lemme 13 *L'application* $A : \Gamma(E) \longrightarrow C(G\,,\,E_0)^{K,\tau}$*, qui à* f *associe* $\widetilde{f}$*, s'étend en une équivalence unitaire entre* $(\,\pi\,,\,L^2(E)\,)$ *et* $(\,\widetilde{\pi}\,,\,L^2(G\,,\,E_0)^{K,\tau}\,)$.

Théorème 5 (***Réciprocité de Frobenius***) *Soient* G *un groupe de Lie compact et* K *un sous-groupe fermé de* G. *Soient* $(\pi_\gamma\,,\,V_\gamma)$ *et* $(\tau\,,\,E_0)$ *deux représentations unitaires irréductibles respectivement de* G *et* K. *Soit* $\widetilde{\pi} = Ind_K^G(\tau)$ *la représentation unitaire induite sur* $L^2(G\,,\,E_0)^{K,\tau}$. *Alors il existe un isomorphisme canonique entre* $Hom_G(V_\gamma\,,\,L^2(G\,,\,E_0)^{K,\tau})$ *et* $Hom_K(V_\gamma\,,\,E_0)$.

Démonstration. Voir $[Kn2]$. $\square$

Remarque. Notons par $\pi_\gamma|_K$ la restriction de la représentation π_γ de G au sous-groupe K. Les multiplicités $m_{\,\pi_\gamma|_K}(\tau) := dim_{\mathbb{C}}\, Hom_K(V_\gamma\,,\,E_0)$ et $m_{\,Ind_K^G(\tau)}(\pi_\gamma) := dim_{\mathbb{C}}\, Hom_G(V_\gamma\,,\,L^2(G\,,\,E_0)^{K,\tau})$ sont donc égales.

Corollaire 2 *On a l'isomorphisme suivant :*

$$L^2(E) \cong \widehat{\bigoplus_{\gamma \in \widehat{G}}} V_\gamma \otimes Hom_K(V_\gamma\,,\,E_0)$$

(*complétion par rapport à* $\|\,.\,\|_{L^2}$).

Démonstration. En utilisant la réciprocité de Frobenius, on obtient que

$$L^2(G\,,\,E_0)^{K,\tau} \cong \widehat{\bigoplus_{\gamma\in\widehat{G}}} V_\gamma \otimes Hom_K(V_\gamma\,,\,E_0),$$

où la complétion est réalisée par rapport à la norme $\|\,.\,\|_{L^2}$. Le résultat du corollaire découle immédiatement de cette observation. □

4 Calcul des valeurs propres de certains opérateurs différentiels invariants

Dans cette section, on donnera l'algorithme général permettant de calculer les valeurs propres de certains opérateurs différentiels invariants. Il s'agit précisément de déterminer le spectre du laplacien de Hodge sur les formes différentielles et celui de l'opérateur de Dirac sur les spineurs. On commence d'abord par rappeler le résultat fondamental de la proposition ci-dessous.

Soit G un groupe de Lie compact connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Alors, on a la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}_1$, où $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ est le centre de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_1 = [\,\mathfrak{g}\,,\,\mathfrak{g}\,]$. Soit $\langle\ ,\ \rangle$ un produit scalaire sur $\mathfrak{g}$ satisfaisant :

(1) $\langle\,\mathfrak{g}_1\,,\,\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\,\rangle = 0$,
(2) $\langle\ ,\ \rangle|_{\mathfrak{g}_1\times\mathfrak{g}_1} = -B_{\mathfrak{g}_1}$, où $B_{\mathfrak{g}_1}$ est la forme de Killing sur $\mathfrak{g}_1$.

Soit $\{X_1, ..., X_n\}$ une base orthonormée de $\mathfrak{g}$ relativement à $\langle\ ,\ \rangle$, et soit $\Omega_{_G} = -\sum_{j=1}^n X_j^2$ l'élément de Casimir de G (relativement au choix de $\langle\ ,\ \rangle$ comme ci-dessus). Soit $(\tau\,,\,E_0)$ une représentation irréductible de dimension finie de K, et soit $E = G\times_{K,\tau} E_0$ le fibré homogène associé. Pour $\gamma \in \widehat{G}$, on pose

$$\Gamma_\gamma(E) := A^{-1}(A_\gamma(V_\gamma \otimes Hom_K(V_\gamma\,,\,E_0))).$$

On identifiera canoniquement $\Gamma_\gamma(E)$ avec l'espace $V_\gamma \otimes Hom_K(V_\gamma\,,\,E_0)$.

Proposition 8 *Soit T un tore maximal de G. Soient G_1 et Z respectivement les sous-groupes connexes de G correspondant à $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Soit $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie de T. On étend le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ sur $\mathfrak{h}$ en un produit scalaire hermitien sur l'espace des formes linéaires à valeurs complexes sur $\mathfrak{h}$. Soit $\gamma \in \widehat{G}$. Alors, $\Omega_{_G}\big|_{\Gamma_\gamma(E)} = c(\gamma)\,Id$ avec $c(\gamma) = \langle\,\lambda_\gamma + 2\,\delta_{_G}\,,\,\lambda_\gamma\,\rangle$, où λ_γ et $\delta_{_G}$ sont respectivement le plus haut poids de γ et $\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+_G}\alpha$, Δ^+_G étant le système des racines positives de G relativement à un choix d'une chambre de Weyl de T.*

Démonstration. Voir $[Wa]$. □

4.1 Spectre du laplacien de Hodge

Soient G un groupe de Lie compact connexe et K un sous-groupe fermé de G. Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ leurs algèbres de Lie respectives. Fixons un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ G-invariant sur $\mathfrak{g}$ et posons $\mathfrak{m} = \mathfrak{k}^{\perp,\langle\ ,\ \rangle}$. La restriction de $\langle\ ,\ \rangle$ à $\mathfrak{m}$ induit une métrique riemannienne G-invariante sur $M = G/K$. On étend naturellement la structure riemannienne sur TM en une une structure unitaire sur $\bigwedge^p (T^*M)^{\mathbb{C}}$, où $(T^*M)^{\mathbb{C}}$ est la complexification du fibré cotangent. On définit un produit scalaire $(\ ,\ )_{_M}$ sur $\Omega^p(M)$ par

$$(\alpha \, , \, \beta)_{_M} = \int_M \langle \alpha \, , \, \beta \rangle \, \omega \, ,$$

où ω est l'élement de volume riemannien. Par construction, l'action de G préserve $(\ ,\ )_{_M}$, i.e., $(g \cdot \alpha \, , \, g \cdot \beta)_{_M} = (\alpha \, , \, \beta)_{_M}$ pour α, $\beta \in \Omega^p(M)$ et $g \in G$. La différentielle extérieure $d : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p+1}(M)$ est un opérateur différentiel invariant. Par suite, l'adjoint formel d^* de d relativement à $(\ ,\ )_{_M}$ et le laplacien de Hodge $\Delta = d\,d^* + d^*d$ sont aussi des opérateurs différentiels invariants.

Rappelons que le fibré tangent TM de $M = G/K$ est le fibré vectoriel homogène associé à la représentation adjointe de K sur $\mathfrak{m}$, i.e., $TM \cong G \times_{K,Ad} \mathfrak{m}$. Par suite, $\bigwedge^p (T^*M)^{\mathbb{C}} \cong G \times_{K \, , \bigwedge^p Ad^*} \bigwedge^p (\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}}$, où $\bigwedge^p Ad^*$ est la représentation induite par Ad sur le produit extérieur $\bigwedge^p (\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}}$. En particulier, on déduit que $\Omega^p(M)$ est isomorphe à $C^\infty(G \, , \bigwedge^p (\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}})^{K \, , \bigwedge^p Ad^*}$.

Supposons de plus que $M = G/K$ est un espace riemannien symétrique. La décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ satisfait ainsi les relations :

$$[\, \mathfrak{k} \, , \, \mathfrak{m} \,] \subset \mathfrak{m} \, , \ \ [\, \mathfrak{k} \, , \, \mathfrak{k} \,] \subset \mathfrak{k} \, , \ \text{ et } \ [\, \mathfrak{m} \, , \, \mathfrak{m} \,] \subset \mathfrak{k}.$$

Proposition 9 *Soient G, K, et M comme ci-dessus. Soit Δ le laplacien de Hodge de $(M \, , \, (\ ,\ )_{_M})$. En identifiant $\Omega^p(M)$ avec $C^\infty(G \, , \bigwedge^p (\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}})^{K \, , \bigwedge^p Ad^*}$, on obtient que $\Delta = \Omega_{_G}$, où $\Omega_{_G}$ est l'élément de Casimir de G (relativement à $\langle\ ,\ \rangle$).*

Démonstration. Soit $\pi : G \longrightarrow G/K$ la projection canonique. On regarde l'espace dual $\mathfrak{m}^*$ comme l'ensemble des formes linéaire sur $\mathfrak{g}$ qui sont identiquement nulles sur $\mathfrak{k}$. L'identification $\Omega^p(M) \longrightarrow C^\infty(G \, , \bigwedge^p (\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}})^{K \, , \rho}$ ($\rho = \bigwedge^p Ad^*$) notée par $\alpha \longmapsto \widetilde{\alpha}$, est définie par

$$(\widetilde{\alpha}(g))(Y_1, ..., Y_p) = (\pi^*\alpha)(Y_1, ..., Y_p)(g)$$

pour $g \in G$ et $Y_1, ..., Y_p \in \mathfrak{g}$. Choisissons une base orthonormée $\{X_1, ..., X_n, X_{n+1}, ..., X_N\}$ de $\mathfrak{g}$ relativement au produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ de sorte que les n premiers vecteurs forment une base de $\mathfrak{m}$. Un élément

$$\eta \in C^\infty(G \, , \bigwedge^p (\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}})^{K \, , \rho} \subset C^\infty(G \, , \bigwedge^p (\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}})$$

est déterminé par la famille des applications C^∞,

$$\{ \, \eta \, (X_{i_1}, ..., X_{i_p}) \, ; \, 1 \leq i_1 < ... < i_p \leq n \, \}.$$

On définit une application linéaire

$$D : C^\infty(G \, , \bigwedge^p (\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}})^{K \, , \rho} \longrightarrow C^\infty(G \, , \bigwedge^{p+1} (\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}})^{K,\rho}$$

par

$$(D \, \eta)(X_{i_1}, ..., X_{i_{p+1}}) := \sum_{u=1}^{p+1} (-1)^{u-1} \, X_{i_u} \cdot \eta \, (X_{i_1}, .., \widehat{X}_{i_u}, .., X_{i_{p+1}})$$

$(1 \leq i_1 < ... < i_{p+1} \leq n)$. Soit $\alpha \in \Omega^p(M)$. On a

$$\begin{aligned}
(D\,\widetilde{\alpha})(X_{i_1},...,X_{i_{p+1}}) &= \sum_{u=1}^{p+1} (-1)^{u-1}\, X_{i_u} \cdot \widetilde{\alpha}\,(X_{i_1},..,\widehat{X}_{i_u},..,X_{i_{p+1}}) \\
&= \sum_{u=1}^{p+1} (-1)^{u-1}\, X_{i_u} \cdot (\pi^*\alpha)\,(X_{i_1},..,\widehat{X}_{i_u},..,X_{i_{p+1}}).
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
(\widetilde{d\,\alpha})(X_{i_1},...,X_{i_{p+1}}) &= (\pi^* d\,\alpha)(X_{i_1},...,X_{i_{p+1}}) \\
&= (d\,\pi^*\alpha)(X_{i_1},...,X_{i_{p+1}}) \\
&= \sum_{u=1}^{p+1} (-1)^{u-1}\, X_{i_u} \cdot (\pi^*\alpha)\,(X_{i_1},..,\widehat{X}_{i_u},..,X_{i_{p+1}}) + \\
&\quad \sum_{1\leq u<v\leq p+1}^{p+1} (-1)^{u+v}\,(\pi^*\alpha)\,([\,X_{i_u}\,,\,X_{i_v}\,],X_{i_1},..,\widehat{X}_{i_u},..,\widehat{X}_{i_v},..,X_{i_{p+1}}).
\end{aligned}$$

Or $X_{i_u}\,,\,X_{i_v} \in \mathfrak{m}$ et $[\,\mathfrak{m}\,,\,\mathfrak{m}\,] \subset \mathfrak{k}$, donc $[\,X_{i_u}\,,\,X_{i_v}\,] \in \mathfrak{k}$ et par suite

$$\sum_{1\leq u<v\leq p+1}^{p+1} (-1)^{u+v}\,(\pi^*\alpha)\,([\,X_{i_u}\,,\,X_{i_v}\,],X_{i_1},..,\widehat{X}_{i_u},..,\widehat{X}_{i_v},..,X_{i_{p+1}}) = 0.$$

Ceci implique que $\widetilde{d\,\alpha} = D\,\widetilde{\alpha}$, d'où $\widetilde{d} = D$. Définissons un produit scalaire K-invariant sur $C^\infty(\,G\,,\,\bigwedge^p(\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}}\,)^{K\,,\,\rho}$ par

$$(\,\xi\,,\,\eta\,) := \int_G \langle\,\xi(g)\,,\,\eta(g)\,\rangle\,dg\,,$$

où dg est la mesure de Haar sur G. Il s'ensuit que $(\,\alpha\,,\,\beta\,)_M = c\,(\,\widetilde{\alpha}\,,\,\widetilde{\beta}\,)$ avec $c \in \mathbb{R}_+^*$. Si $\xi \in C^\infty(\,G\,,\,\bigwedge^p(\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}}\,)^{K\,,\,\rho}$ et $\eta \in C^\infty(\,G\,,\,\bigwedge^{p-1}(\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}}\,)^{K\,,\,\rho}$, alors

$$\begin{aligned}
(\,D^*\xi\,,\,\eta\,) = (\,\xi\,,\,D\,\eta\,) &= \frac{1}{p\,!}\int_G \sum_{1\leq i_1<...<i_p\leq n} \langle\,\xi\,(X_{i_1},...,X_{i_p})\,, \\
&\quad \sum_{u=1}^{p} (-1)^{u-1}\,X_{i_u} \cdot \eta\,(X_{i_1},..,\widehat{X}_{i_u},..,X_{i_p})\,\rangle\,dg \\
&= -\frac{1}{p\,!} \sum_{1\leq i_1<...<i_p\leq n} \sum_{u=1}^{p} (-1)^{u-1} \int_G \langle\,X_{i_u}\cdot\xi\,(X_{i_1},...,X_{i_p})\,, \\
&\quad \eta\,(X_{i_1},..,\widehat{X}_{i_u},..,X_{i_p})\,\rangle\,dg \\
&= -\frac{1}{(p-1)\,!} \sum_{1\leq j_1<...<j_{p-1}\leq n} \sum_{k=1}^{n} \int_G \langle\,X_k\cdot\xi\,(X_k,X_{j_1},...,X_{j_{p-1}})\,, \\
&\quad \eta\,(X_{j_1},...,X_{j_{p-1}})\,\rangle\,dg\,.
\end{aligned}$$

On en déduit que D^* est donné par

$$(D^*\xi)(X_{i_1},...,X_{i_{p-1}}) = -\sum_{k=1}^{n} X_k \cdot \xi\,(X_k, X_{i_1},...,X_{i_{p-1}})$$

($1 \leq i_1 < ... < i_{p-1} \leq n$). En posant $\widehat{\Delta} = D\,D^* + D^*D$, on remarque que

$$(\,\Delta\,\alpha\,,\,\beta\,)_{_M} = c\,(\,\widehat{\Delta}\,\widetilde{\alpha}\,,\,\widetilde{\beta}\,) \quad \text{pour } \alpha, \beta \in \Omega^p(M).$$

Par conséquent, $\widetilde{\Delta\,\alpha} = \widehat{\Delta}\,\widetilde{\alpha}$ pour tout $\alpha \in \Omega^p(M)$, d'où $\widetilde{\Delta} = \widehat{\Delta}$. Pour démonter la proposition, il suffit donc de prouver que $\widehat{\Delta}\,\widetilde{\alpha} = -\sum_{k=1}^{N} X_k^2\,\widetilde{\alpha}$ pour tout $\alpha \in \Omega^p(M)$.

Soient $X_{i_1},...,X_{i_p} \in \mathfrak{m}$ avec $1 \leq i_1 < ... < i_p \leq n$, et soit $\alpha \in \Omega^p(M)$. On a

$$\begin{aligned}
(D\,D^*\widetilde{\alpha})(X_{i_1},...,X_{i_p}) &= \sum_{u=1}^{p} (-1)^{u-1}\,X_{i_u} \cdot (D^*\,\widetilde{\alpha})\,(X_{i_1},..,\widehat{X}_{i_u},..,X_{i_p}) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{u=1}^{p} (-1)^{u}\,X_{i_u}X_k \cdot \widetilde{\alpha}\,(X_k, X_{i_1},..,\widehat{X}_{i_u},..,X_{i_p}).
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
(D^*D\,\widetilde{\alpha})(X_{i_1},...,X_{i_p}) &= -\sum_{k=1}^{n} X_k \cdot (D\,\widetilde{\alpha})\,(X_k, X_{i_1},..,X_{i_p}) \\
&= -\sum_{k=1}^{n} X_k^2 \cdot \widetilde{\alpha}\,(X_{i_1},...,X_{i_p}) - \\
&\quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{u=1}^{p} (-1)^{u}\,X_kX_{i_u} \cdot \widetilde{\alpha}\,(X_k, X_{i_1},..,\widehat{X}_{i_u},..,X_{i_p}).
\end{aligned}$$

Par conséquent, on trouve que

$$\begin{aligned}
(\widehat{\Delta}\,\widetilde{\alpha})(X_{i_1},...,X_{i_p}) &= -\sum_{k=1}^{n} X_k^2 \cdot \widetilde{\alpha}\,(X_{i_1},...,X_{i_p}) + \\
&\quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{u=1}^{p} (-1)^{u}\,[\,X_{i_u}\,,\,X_k\,] \cdot \widetilde{\alpha}\,(X_k, X_{i_1},..,\widehat{X}_{i_u},..,X_{i_p}).
\end{aligned}$$

Posons

$$II \;=\; \sum_{k=1}^{n}\sum_{u=1}^{p} (-1)^{u}\,[\,X_{i_u}\,,\,X_k\,] \cdot \widetilde{\alpha}\,(X_k, X_{i_1},..,\widehat{X}_{i_u},..,X_{i_p}).$$

Pour $u \in \{1,...,p\}$ et $k \in \{1,...,n\}$, on a

$$[\,X_{i_u}\,,\,X_k\,] = \sum_{j=n+1}^{N} C_{i_u,k}^{j}\,X_j\,,$$

où les $C_{i_u,k}^{j}$ sont des constantes de structure de G. Par suite, on écrit

$$II \;=\; \sum_{k=1}^{n}\sum_{u=1}^{p}\sum_{j=n+1}^{N} (-1)^{u}\,C_{i_u,k}^{j}\,X_j \cdot \widetilde{\alpha}\,(X_k, X_{i_1},..,\widehat{X}_{i_u},..,X_{i_p}).$$

Notons que si $j \in \{n+1, ..., N\}$, alors

$$\begin{aligned}
X_j \cdot \widetilde{\alpha}\,(X_{i_1}, ..., X_{i_p})(g) &= \frac{d}{dt}\Big|_0 \widetilde{\alpha}\,(g\,exp(tX_j))(X_{i_1}, ..., X_{i_p}) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_0 \widetilde{\alpha}\,(g)(\,Ad(exp(tX_j))X_{i_1}, ..., Ad(exp(tX_j))X_{i_p}\,) \\
&= \sum_{u=1}^{p} (-1)^{u-1}\,\widetilde{\alpha}\,(g)(\,[\,X_j\,,\,X_{i_u}\,], X_{i_1}, .., \widehat{X}_{i_u}, .., X_{i_p}\,) \\
&= \sum_{u=1}^{p}\;\sum_{k=1}^{n} (-1)^{u-1}\,C^k_{j,i_u}\,\widetilde{\alpha}\,(g)(X_k, X_{i_1}, .., \widehat{X}_{i_u}, .., X_{i_p}).
\end{aligned}$$

Comme G est un groupe de Lie compact, on a l'égalité $C^k_{j,i_u} = C^j_{i_u,k}$ pour tout $u \in \{1, ..., p\}$ et tout $k \in \{1, ..., n\}$. Ainsi, on obtient

$$X_j \cdot \widetilde{\alpha}\,(X_{i_1}, ..., X_{i_p}) = \sum_{u=1}^{p}\;\sum_{k=1}^{n} (-1)^{u-1}\,C^j_{i_u,k}\,\widetilde{\alpha}\,(X_k, X_{i_1}, .., \widehat{X}_{i_u}, .., X_{i_p}).$$

Il en résulte que

$$II = -\sum_{j=n+1}^{N} X_j^2 \cdot \widetilde{\alpha}\,(X_{i_1}, ..., X_{i_p}).$$

Finalement, on conclut que $\widehat{\Delta}\,\widetilde{\alpha} = -\sum_{j=1}^{N} X_j^2 \cdot \widetilde{\alpha}$. Ceci prouve que $\widehat{\Delta} = \Omega_{\,G}$, i.e., le laplacien de Hodge Δ s'identifie avec $\Omega_{\,G}$, le dernier étant vu comme opérateur différentiel invariant à gauche. □

Remarques. (a) Soit $(\pi_\gamma\,,\,V_\gamma)$ un représentant de $\gamma \in \widehat{G}$. Du fait que $\pi_\gamma(\Omega_{\,G}) = c(\gamma)\,Id$, où $c(\gamma)$ est la constante donnée dans la Proposition 8, il en découle que $\pi^*_\gamma(\Omega_{\,G}) = c(\gamma)\,Id$.

(b) Soit $L^2(\bigwedge^p(T^*M)^{\mathbb{C}}\,)$ l'espace des sections de carré intégrable du fibré $\bigwedge^p(T^*M)^{\mathbb{C}}$. Alors,

$$L^2(\bigwedge^p(T^*M)^{\mathbb{C}}\,) \cong \widehat{\bigoplus_{\gamma\in\widehat{G}}}\; V_\gamma \otimes Hom_K(\,V_\gamma\,,\,\bigwedge^p(\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}}\,).$$

Supposons que $\bigwedge^p(\mathfrak{m}^*)^{\mathbb{C}} \cong \bigoplus_{\delta\in\Lambda} m_\delta\,W_\delta$, où $\Lambda \subset \widehat{K}$, les W_δ sont des K-représentations irréductibles, et les $m_\delta \in \mathbb{N}^*$ sont des multiplicités. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
L^2(\bigwedge^p(T^*M)^{\mathbb{C}}\,) &\cong \widehat{\bigoplus_{\gamma\in\widehat{G}}}\;\bigoplus_{\delta\in\Lambda} m_\delta\,(V_\gamma \otimes (V^*_\gamma \otimes W_\delta)^K) \\
&\cong \widehat{\bigoplus_{\gamma\in\widehat{G}}}\;\bigoplus_{\delta\in\Lambda} m_\delta\,m_{\gamma|_K}(\delta)\,V_\gamma\,.
\end{aligned}$$

Si $\gamma \in \widehat{G}$ est tel que $m_{\gamma|_K}(\delta) \neq 0$ pour un certain $\delta \in \Lambda$, on note que

$$\Delta\big|_{V_\gamma \otimes (V^*_\gamma \otimes W_\delta)^K} = Id_{\,V_\gamma} \otimes \pi^*_\gamma(\Omega_{\,G}) \otimes Id_{\,W_\delta}\,.$$

Comme M est compacte et Δ est elliptique, le spectre de Δ est donné par

$$\mathrm{Spec}_{\Delta}\,(\,\Omega^p(M)\,) = \big\{c(\gamma)\,;\ \gamma\in\widehat{G},\ \delta\in\Lambda,\ m_{\gamma|_K}(\delta)\neq 0\big\},$$

où $c(\gamma)$ désigne la valeur propre de l'élément de Casimir de G sur le module V_γ. Bien évidemment, chacune de ces valeurs propres est prise m_δ-fois.

Exemple. Soit la paire symétrique $(G\,,\,K) = (\,SU(n+1)\,,\,S(U(n)\times U(1))\,)$ avec $n\geq 2$. Alors, $M = G/K$ est difféomorphe à l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Dans ce qui suit, nous allons calculer explicitement les valeurs propres du laplacien de Hodge Δ agissant sur les formes différentielles complexes de type $(0\,,\,q)$ sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Considérons d'abord le tore maximal

$$T = \{A = \mathrm{diag}(e^{i\theta_1},....,e^{i\theta_n},e^{-i\sum_{j=1}^n\theta_j})\,;\theta_j\in\mathbb{R}\ \text{ pour }\ j=1,...,n\}$$

de G (et K), et notons $\mathfrak{h}$ son algèbre de Lie. Pour tout $j\in\{1,...,n+1\}$, on définit la forme linéaire

$$e_j:\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}\longrightarrow\mathbb{C}\,,\ H=\mathrm{diag}(h_1,...,h_{n+1})\longmapsto h_j\,.$$

On fixe le système de racines positives suivant de G relativement à T:

$$\Delta_G^+ = \{e_i - e_j\,;\ 1\leq i<j\leq n\}\cup\{e_1+\cdot\cdot+2\,e_i+\cdot\cdot+e_n\,;\ 1\leq i\leq n\}\,.$$

Notons que $\bigwedge^{0,q} M$ est isomorphe à $(\bigwedge^{q,0} M)^*$, où $(\bigwedge^{q,0} M)^*$ est le fibré dual de $\bigwedge^{q,0} M$. De plus,

$$\bigwedge\nolimits^{q,0} M \cong G\times_{K\,,\bigwedge^q Ad^*}\bigwedge\nolimits^q(\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^*)\,,$$

où la représentation $\bigwedge^q Ad^*$ de K est irréductible de plus haut poids

$$\nu = \begin{cases} 0 & \text{si }\ q=0\,,\\ (q+1)(e_1+\cdots+e_q)+q(e_{q+1}+\cdots+e_n) & \text{si }\ 1\leq q\leq n-1\,,\\ (n+1)(e_1+\cdots+e_n) & \text{si }\ q=n\,. \end{cases}$$

On en déduit que $(\bigwedge^{0,q} M)_{eK}$ est un K-module irréductible de plus haut poids

$$\mu \overset{(\star)}{=} \begin{cases} 0 & \text{si }\ q=0\,,\\ -q(e_1+\cdots+e_{n-q})-(q+1)(e_{n-q+1}+\cdots+e_n) & \text{si }\ 1\leq q\leq n-1\,,\\ -(n+1)(e_1+\cdots+e_n) & \text{si }\ q=n\,. \end{cases}$$

Pour appliquer l'algorithme permettant de calculer le spectre de Δ, on a besoin du résultat suivant (voir, par exemple, $[IT]$, $[CFG]$ ou $[BH]$) :

Proposition 10 *Soit τ_λ (resp. τ_μ) une représentation irréductible de $SU(n+1)$ (resp. $S(U(n)\times U(1))$) de plus haut poids $\lambda=\sum_{j=1}^n\lambda_j e_j$ (resp. $\mu=\sum_{j=1}^n\mu_j e_j$). Alors, la multiplicité $m_{\tau_\lambda|_{S(U(n)\times U(1))}}(\,\tau_\mu\,)$ est égale à 0 ou 1, et $m_{\tau_\lambda|_{S(U(n)\times U(1))}}(\tau_\mu)=1$ si et seulement si μ est de la forme*

$$\mu=\sum_{j=1}^n(\nu_j-a)e_j$$

avec $\lambda_1\geq\nu_1\geq\lambda_2\geq\nu_2\geq...\geq\lambda_n\geq\nu_n\geq 0$ et $a=\sum_{j=1}^n(\lambda_j-\nu_j)$.

Soit $0 \leq q \leq n$ et soit τ_μ l'unique (à équivalence près) représentation irréductible de K de plus poids μ donné par l'égalité $(\star)$. Soit τ_λ une représentation irréductible de G de plus haut poids $\lambda = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j$. Par la proposition précédente, on conclut que la multiplicité $m_{\tau_\lambda|_{S(U(n)\times U(1))}}(\tau_\mu)$ est non nulle (et donc égale à 1) si et seulement si,

(i) pour $q = 0$, λ est de la forme

$$\lambda = 2\,ke_1 + k(e_2 + \cdots + e_n)$$

avec $k \geq 0$;

(ii) pour $1 \leq q \leq n-1$, λ est de la forme

$$\begin{aligned}\lambda \;=\; & (2\,k - q - \varepsilon)e_1 + (k-q)(e_2 + \cdots + e_{n-q}) + (k - q + \varepsilon - 1)e_{n-q+1} + \\ & (k-q-1)(e_{n-q+2} + \cdots + e_n)\end{aligned}$$

avec $\varepsilon \in \{0, 1\}$ et $k \geq q+1$;

(iii) pour $q = n$, λ est de la forme

$$\lambda = (2\,k - n - 1)e_1 + (k - n - 1)(e_2 + \cdots + e_n)$$

avec $k \geq n + 1$.

Sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n+1)$, on considére le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ donné par

$$\langle\, X\,,\, Y\,\rangle = -B(X\,,\,Y) \quad \text{pour } X,\, Y \in \mathfrak{g}\,,$$

où B est la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. Par dualité, on étend $\langle\ ,\ \rangle$ en un produit scalaire sur l'espace des formes linéaires à valeurs complexes sur $\mathfrak{h}$. Observons que

$$\langle\, e_i\,,\, e_i\,\rangle = \frac{n}{2\,(n+1)^2}$$

pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, et que

$$\langle\, e_i\,,\, e_j\,\rangle = \frac{-1}{2\,(n+1)^2}$$

pour tous $i, j \in \{1, ..., n\}$ avec $i \neq j$. Finalement, en remarquant que la demi-somme des racines positives de G est $\delta_G = \sum_{j=1}^n (n+1-j)e_j$, on obtient que

$$\begin{aligned}\mathrm{Spec}_\Delta\,(\,\Omega^{0,q}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))\,) &= \big\{\,\langle\,\lambda + 2\,\delta_G\,,\,\lambda\,\rangle\,;\ m_{\lambda|_K}(\mu) \neq 0\,\big\} \\ &= \begin{cases}\left\{\,\dfrac{k\,(k+n)}{n+1}\ ;\ k \geq 0\right\} & \text{si } q = 0\,, \\[2ex] \left\{\,\dfrac{(k-\varepsilon)(k+n-q)}{n+1}\ ;\ \varepsilon \in \{0,1\},\ k \geq q+1\right\} & \text{si } 1 \leq q \leq n-1\,, \\[2ex] \left\{\,\dfrac{k\,(k-1)}{n+1}\ ;\ k \geq n+1\right\} & \text{si } q = n\,.\end{cases}\end{aligned}$$

Remarque. Sur une variété kählerienne M, le laplacien de Hodge Δ est relié au laplacien complexe $\Box$ par la formule $\Delta = 2\,\Box$ (voir $[We]$, Théorème 4.7). Comme $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est une variété kählerienne, cette formule nous permet de déduire le spectre de $\Box$ sur $\Omega^{0,q}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ à partir du spectre de Δ calculé ci-dessus.

4.2 Spectre de l'opérateur de Dirac

Dans cette section, on suit la description de T. Friedrich (voir [F]) des spineurs et de l'opérateur de Dirac sur un espace riemannien symétrique.

Soit $M^n = G/K$ un espace riemannien symétrique de dimension (réelle) n où G est un groupe de Lie compact connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et K est un sous-groupe fermé de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$. Considérons un produit scalaire G-invariant $\langle\ ,\ \rangle$ sur $\mathfrak{g}$ et posons $\mathfrak{m} = \mathfrak{k}^{\perp,\langle\ ,\ \rangle}$. Ce produit scalaire définit une métrique riemannienne sur M qu'on note aussi par $\langle\ ,\ \rangle$. Soient L_g et R_g respectivement les translations à droite et à gauche dans le groupe G: $L_g(g_1) = g\,g_1$, $R_g(g_1) = g_1\,g$. La projection canonique $\pi : G \longrightarrow G/K$ est un K-fibré principal. Pour $X \in \mathfrak{k}$, le champ de vecteur fondamental de l'action de K au point $g \in G$ est donné par

$$\widetilde{X}(g) = \frac{d}{dt}\,(\, g \cdot exp(tX)\,)\Big|_{t=0}.$$

Donc, $\widetilde{X}$ coïncide avec le champ de vecteurs invariant à gauche associé au vecteur $X \in \mathfrak{g}$. Par suite, l'espace tangent vertical du K-fibré principal $(\,G\,,\,\pi\,,\,G/K\,)$ au point $g \in G$ coïncide avec l'espace $dL_g(\mathfrak{k})$, i.e., $T_g^vG = dL_g(\mathfrak{k})$. Observons que $T_gG = dL_g(\mathfrak{k}) \oplus dL_g(\mathfrak{m})$ et que $dR_k(dL_g(\mathfrak{m})) = dL_{gk}(\mathfrak{m})$ pour $g \in G$ et $k \in K$. Le choix $T_g^hG = dL_g(\mathfrak{m})$, où $g \in G$, définit une distribution des espaces horizontaux, i.e., une connexion principale sur $G \longrightarrow G/K$. Soit Θ la forme de Maurer-Cartan du groupe de Lie G ; $\Theta : TG \longrightarrow \mathfrak{g}$, $\Theta(t_g) = dL_{g^{-1}}(t_g)$ pour $g \in G$ et $t_g \in T_gG$. La une-forme $Z := pr_{\mathfrak{k}} \circ \Theta : TG \longrightarrow \mathfrak{k}$ est la forme de connexion canonique dans le K-fibré $(\,G\,,\,\pi\,,\,G/K\,)$. La forme de courbure de cette connexion est donnée par

$$\begin{aligned}\Omega^Z &= d\,Z + \frac{1}{2}\,[\,Z\,,\,Z\,]\\ &= pr_{\mathfrak{k}}(d\,\Theta) + \frac{1}{2}\,[\,pr_{\mathfrak{k}}\,\Theta\,,\,pr_{\mathfrak{k}}\,\Theta\,].\end{aligned}$$

Si $\Theta = \Theta_{\mathfrak{k}} + \Theta_{\mathfrak{m}}$ est la décomposition de la forme de Maurer-Cartan, alors

$$\begin{aligned}\Omega^Z &= pr_{\mathfrak{k}}\,(\,d\,\Theta + \frac{1}{2}\,[\,\Theta\,,\,\Theta\,]\,) - \frac{1}{2}\,[\,\Theta_{\mathfrak{m}}\,,\,\Theta_{\mathfrak{m}}\,]\\ &= -\frac{1}{2}\,[\,\Theta_{\mathfrak{m}}\,,\,\Theta_{\mathfrak{m}}\,]\end{aligned}$$

car $d\,\Theta + \frac{1}{2}\,[\,\Theta\,,\,\Theta\,] = 0$.

Un champ de vecteurs T sur la variété M peut être regardé comme une application $T : G \longrightarrow \mathfrak{m}$ satisfaisant

$$T(gk) = Ad(k^{-1})\,T(g) \quad \text{pour } g \in G \text{ et } k \in K.$$

Notons ∇^Z la dérivée covariante induite par Z sur $TM = G \times_{K,Ad} \mathfrak{m}$. On a donc que $\nabla^Z T = d\,T + [\,pr_{\mathfrak{k}}\,\Theta\,,\,T\,]$. En utilisant cette formule et la propriété d'invariance de $\langle\ ,\ \rangle$, on vérifie que ∇^Z préserve la métrique riemannienne. De même, on montre que ∇^Z est sans torsion. Ceci implique que $\nabla^Z \equiv \nabla$, où ∇ est la connexion de Levi-Civita sur M.

Supposons que l'espace riemannien symétrique $M = G/K$ est muni d'une structure spin homogène, i.e., supposons qu'il existe un homomorphisme

$$\widetilde{Ad} : K \longrightarrow Spin(\mathfrak{m})$$

tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\widetilde{Ad}"] \arrow[dr, "Ad"'] & Spin(\mathfrak{m}) \arrow[d, "\lambda"] \\ & SO(\mathfrak{m}) \end{tikzcd}$$

commute. Soit $\kappa : Spin(\mathfrak{m}) \longrightarrow GL(\Delta)$ la représentation spin. Un champ spinoriel ψ s'identifie avec une fonction $\psi : G \longrightarrow \Delta$ satisfaisant la condition

$$\psi(gk) = \kappa(\widetilde{Ad}\,(k^{-1}))\psi(g) \quad \text{pour } g \in G \text{ et } k \in K.$$

Pour $X \in \mathfrak{k}$ et $g \in G$, on a

$$\begin{aligned} (X\,\psi)(g) &= \frac{d}{dt}\,\psi(g\,exp(tX))\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\,\kappa(\widetilde{Ad}\,(exp(-tX))\psi(g)\Big|_{t=0} \\ &= -\kappa_*(\widetilde{Ad}\,(X))\psi(g), \end{aligned}$$

i.e., $X\,\psi = -\kappa_*(\widetilde{Ad}_*(X))\psi = -\widetilde{Ad}_*(X)\cdot\psi$, où $\widetilde{Ad}_*(X)\cdot\psi$ est la multiplication de Clifford du spineur $\psi \in \Delta = \Delta(\mathfrak{m})$ par l'élément $\widetilde{Ad}_*(X) \in spin(\mathfrak{m})$. Soit $D^Z\psi$ la différentielle absolue de ψ. Alors,

$$(D^Z\psi)(X) = d\,\psi(X) + \kappa_*(\widetilde{Ad}_*(Z(X)))\psi.$$

Rappelons que $(D^Z\psi)(X) = 0$ pour $X \in \mathfrak{k}$ et que $(D^Z\psi)(X) = X(\psi)$ pour $X \in \mathfrak{m}$. Relativement à une base orthonormée $\{X_1, ..., X_m\}$ de $\mathfrak{m}$, on écrit

$$D^Z\psi = \sum_{i=1}^{m} X_i \otimes X_i(\psi)\,.$$

Par suite, on obtient l'expression suivante pour l'opérateur de Dirac :

$$D\,\psi = \sum_{i=1}^{m} X_i \cdot X_i(\psi)\,.$$

Ceci prouve que D s'identifie à un opérateur différentiel invariant à gauche.

Proposition 11 *Soit $M^n = G/K$ un espace riemannien symétrique compact de dimension n muni d'une structure spin homogène. Soit R la coubure scalaire (constante) de l'espace M^n, et soit Ω_G l'élément de Casimir de G. Alors, on a l'identification*

$$D^2 = \Omega_G + \frac{R}{8}\,.$$

Démonstration. Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ les algèbres de Lie respectives de G et K. Soit $\langle\ ,\ \rangle$ un produit scalaire G-invariant sur $\mathfrak{g}$. Fixons une base orthonormée $\{X_1, ..., X_m\}$ de $\mathfrak{m} := \mathfrak{k}^{\perp, \langle\ ,\ \rangle}$. Le carré de l'opérateur de Dirac est donné par

$$\begin{aligned} D^2\psi &= \sum_{i,j=1}^{m} X_i \cdot X_j \cdot (X_i\, X_j(\psi)) \\ &= -\sum_{i=1}^{m} X_i^2(\psi) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} X_i \cdot X_j \cdot ([\, X_i\, ,\, X_j\,](\psi)). \end{aligned}$$

Notons que $[\, X_i\, ,\, X_j\,] \in \mathfrak{k}$ pour $1 \leq i, j \leq m$. Par conséquent,

$$[\, X_i\, ,\, X_j\,](\psi) = -\widetilde{Ad}_*([\, X_i\, ,\, X_j\,]) \cdot \psi.$$

Il s'ensuit que

$$D^2\psi = -\sum_{i=1}^{m} X_i^2(\psi) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} X_i \cdot X_j \cdot \widetilde{Ad}_*([\, X_i\, ,\, X_j\,]) \cdot \psi.$$

Choisissons une base orthonormée $\{Y_1, ..., Y_k\}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$. On a

$$Y_\alpha^2\, \psi = \widetilde{Ad}_*(Y_\alpha) \cdot \widetilde{Ad}_*(Y_\alpha) \cdot \psi \quad \text{pour } \alpha \in \{1, ..., k\}.$$

Soit $\Omega_{_G} = -\sum_{i=1}^{m} X_i^2 - \sum_{\alpha=1}^{k} Y_\alpha^2$ l'élément de Casimir de G. Alors,

$$D^2\psi = \Omega_{_G}\, \psi + \sum_{\alpha=1}^{k} \widetilde{Ad}_*(Y_\alpha) \cdot \widetilde{Ad}_*(Y_\alpha) \cdot \psi - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} X_i \cdot X_j \cdot \widetilde{Ad}_*([\, X_i\, ,\, X_j\,]) \cdot \psi.$$

Pour $\alpha \in \{1, ..., k\}$, on a

$$\begin{aligned} \widetilde{Ad}_*(Y_\alpha) &= \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^{m} \langle\, \lambda_*\, \widetilde{Ad}_*(Y_\alpha)(X_i)\, ,\, X_j\, \rangle\, X_i\, X_j \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^{m} \langle\, Ad_*(Y_\alpha)(X_i)\, ,\, X_j\, \rangle\, X_i\, X_j \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^{m} \langle\, [\, Y_\alpha\, ,\, X_i\,]\, ,\, X_j\, \rangle\, X_i\, X_j. \end{aligned}$$

De même, si $i, j \in \{1, ..., m\}$, alors

$$\widetilde{Ad}_*([\, X_i\, ,\, X_j\,]) = \frac{1}{4} \sum_{p,q=1}^{m} \langle\, [\, [\, X_i\, ,\, X_j\,]\, ,\, X_p\,]\, ,\, X_q\, \rangle\, X_p\, X_q.$$

Par suite, on obtient que

$$\begin{aligned} D^2\, \psi - \Omega_{_G}\, \psi \;=\; & \frac{1}{16} \sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{p,q=1}^{m} \langle\, [\, Y_\alpha\, ,\, X_i\,]\, ,\, X_j\, \rangle \langle\, [\, Y_\alpha\, ,\, X_p\,]\, ,\, X_q\, \rangle\, X_i\, X_j\, X_p\, X_q\, \psi\, - \\ & \frac{1}{8} \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{p,q=1}^{m} \langle\, [\, [\, X_i\, ,\, X_j\,]\, ,\, X_p\,]\, ,\, X_q\, \rangle\, X_i\, X_j\, X_p\, X_q\, \psi \end{aligned}$$

En utilisant la propriété d'invariance du produit scalaire $\langle\, ,\, \rangle$ sur $\mathfrak{g}$, on remarque que

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{k} \langle\, [\, Y_\alpha\, ,\, X_i\,]\, ,\, X_j\, \rangle\, \langle\, [\, Y_\alpha\, ,\, X_p\,]\, ,\, X_q\, \rangle &= \sum_{\alpha=1}^{k} \langle\, Y_\alpha\, ,\, [\, X_i\, ,\, X_i\,]\, \rangle\, \langle\, Y_\alpha\, ,\, [\, X_p\, ,\, X_q\,]\, \rangle \\ &= \langle\, [\, X_i\, ,\, X_j\,]\, ,\, [\, X_p\, ,\, X_q\,]\, \rangle.\end{aligned}$$

Ceci implique l'égalité

$$D^2\, \psi - \Omega_{_G}\, \psi = -\frac{1}{16} \sum_{i,j,p,q=1}^{m} \langle\, [\, X_i\, ,\, X_j\,]\, ,\, [\, X_p\, ,\, X_q\,]\, \rangle\, X_i\, X_j\, X_p\, X_q\, \psi.$$

La connexion de Levi-Civita sur l'espace riemannien $M = G/K$ est induite de la connexion Z dans le K-fibré principal $(G\, ,\, \pi\, ,\, G/K)$. Par conséquent, le tenseur de courbure de Riemann $Riem$ de M satisfait la formule

$$Riem\, (X_i\, ,\, X_j) = [\, \Omega^Z\, (X_i\, ,\, X_j)\, ,\, \cdot\,]\, ,$$

d'où

$$\begin{aligned}\langle\, Riem\, (X_i\, ,\, X_j) X_p\, ,\, X_q\, \rangle &= \langle\, [\, \Omega^Z\, (X_i\, ,\, X_j)\, ,\, X_p\,]\, ,\, X_q\, \rangle \\ &= -\langle\, [\, [\, X_i\, ,\, X_j\,]\, ,\, X_p\,]\, ,\, X_q\, \rangle \\ &= -\langle\, [\, X_i\, ,\, X_j\,]\, ,\, [\, X_p\, ,\, X_q\,]\, \rangle\end{aligned}$$

pour $i, j, p, q \in \{1, ..., m\}$. En exploitant les relations dans l'algèbre de Clifford associée à $(\mathfrak{m}\, ,\, \langle\ \, ,\ \, \rangle)$, $Cliff(\mathfrak{m})$, on obtient que

$$\begin{aligned}D^2\, \psi - \Omega_{_G}\, \psi &= -\frac{1}{4} \sum_{i<j} \langle\, [\, X_i\, ,\, X_j\,]\, ,\, [\, X_p\, ,\, X_q\,]\, \rangle\, X_i\, X_j\, X_p\, X_q\, \psi \\ &= \frac{1}{8} \sum_{i,j=1} \|\, [\, X_i\, ,\, X_j\,]\, \|^2\, \psi \\ &= \frac{R}{8}\, \psi\, ,\end{aligned}$$

où R est la coubure scalaire de la variété M. Ceci achève la démonstration de la proposition. □

Remarques. (1) Soient G, K, et $\langle\ ,\ \rangle$ comme ci-dessus. Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ les algèbres de Lie respectives de G et K. Comme $M = G/K$ est symétrique, il existe une involution σ de G telle que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ avec

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g}\, ;\, d\,\sigma(X) = X\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{g}\, ;\, d\,\sigma(X) = -X\}.$$

Soit ψ un champ spinoriel et soit $\{X_1, ..., X_m\}$ une base orthonormée de $\mathfrak{m}$. Si $i \in \{1, ..., m\}$, alors

$$\begin{aligned}X_i(\sigma^*\psi)(g) &= \frac{d}{dt}\Big|_0 (\sigma^*\psi)(g\, exp(tX_i)) \\ &= d(\psi \circ \sigma \circ L_g)(X_i) \\ &= d(\psi \circ L_{\sigma(g)})(d\,\sigma)(X_i) \\ &= -d(\psi \circ L_{\sigma(g)})(X_i) \\ &= -\sigma^*(X_i\, \psi)(g)\end{aligned}$$

pour tout $g \in G$. Ainsi, $X_i(\sigma^*\psi) = -\sigma^*(X_i\,\psi)$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} D(\sigma^*\psi) &= \sum_{i=1}^{m} X_i \cdot (X_i(\sigma^*\psi)) \\ &= -\sigma^*(D\,\psi)\,. \end{aligned}$$

En particulier, si $D\,\psi = \lambda\,\psi$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), alors $D(\sigma^*\psi) = -\lambda\,\sigma^*\psi$, i.e., $\sigma^*\psi$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $-\lambda$. On conclut donc que le spectre de D est symétrique par rapport à l'origine. Par suite, ce spectre est complètement déterminé par le spectre de D^2.

(2) Considérons l'espace $L^2(S)$ des sections de carré intégrable du fibré des spineurs. Rappelons que

$$L^2(S) \cong \widehat{\bigoplus_{\gamma\in\widehat{G}}}\, V_\gamma \otimes Hom_K(\,V_\gamma\,,\,\Delta\,).$$

Le K-module des spineurs Δ n'est pas en général irréductible. On écrit

$$\Delta = \bigoplus_{\delta\in\Lambda} m_\delta\,W_\delta\,,$$

où $\Lambda \subset \widehat{K}$, les W_δ sont des K-représentations irréductibles, et les $m_\delta \in \mathbb{N}^*$ sont des multiplicités. Par conséquent,

$$\begin{aligned} L^2(S) &\cong \widehat{\bigoplus_{\gamma\in\widehat{G}}} \bigoplus_{\delta\in\Lambda} m_\delta\,(V_\gamma \otimes (V_\gamma^* \otimes W_\delta)^K) \\ &\cong \widehat{\bigoplus_{\gamma\in\widehat{G}}} \bigoplus_{\delta\in\Lambda} m_\delta\, m_{\gamma|_K}(\delta)\,V_\gamma\,. \end{aligned}$$

Précisons que

$$D^2\big|_{V_\gamma \otimes (V_\gamma^* \otimes W_\delta)^K} = \big(Id_{V_\gamma} \otimes \pi_\gamma^*(\Omega_G) \otimes Id_{W_\delta}\big) + \frac{R}{8}$$

dans le cas où $m_{\gamma|_K}(\delta) \neq 0$. Par suite, le spectre du carré de l'opérateur de Dirac est donné par

$$\mathrm{Spec}_{D^2}\,(\,\Gamma^\infty(S)\,) = \big\{c(\gamma) + \frac{R}{8}\,;\,\gamma \in \widehat{G},\ \delta \in \Lambda,\ m_{\gamma|_K}(\delta) \neq 0\big\},$$

où chaque valeur propre $c(\gamma)$ est prise m_δ-fois.

Exemple. Considérons le cas où $(G\,,\,K) = (\,SU(n+1)\,,\,S(U(n)\times U(1))\,)$ avec $n \geq 2$. L'espace riemannien symétrique $G/K \cong \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ admet une sructure spin (qui est dans ce cas unique) si et seulement si n est impair. Par la suite, on supposera que n est impair. Soit S le fibré des spineurs associé à la structure spin (homogène) de $M = G/K$. Comme M est une variété kählerienne, on a l'isomorphisme suivant :

$$S \cong S_0 \oplus ... \oplus S_n\,,$$

où S_n est un fibré en droites complexes tel que $S_n^2 = K_M := \bigwedge^{n,0} M$, et $S_{n-r} = \bigwedge^{0,r} M \otimes S_n$ pour tout $r \in \{0, ..., n\}$ (voir [F] pour ces faits).

Soient maintenant T, Δ_G^+, et $\langle\ ,\ \rangle$ comme dans l'exemple précédent. Notons que

$$K_M \cong G \times_{K\,,\,\bigwedge^n Ad^*} \bigwedge^n (\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^*)\,.$$

Il s'ensuit que $(S_n)_{eK}$ est un K-module irréductible de plus haut poids

$$\nu = \frac{n+1}{2}\,\big(e_1 + \cdots + e_n\big)\,.$$

Par conséquent, $(S_{n-r})_{eK} \cong (\bigwedge^{0,r} M)_{eK} \otimes (S_n)_{eK}$ est également un K-module irréductible de plus haut poids

$$\mu = \begin{cases} \frac{n+1}{2}\,(e_1 + \cdots + e_n) & \text{si } r = 0\,, \\ \frac{n+1-2\,r}{2}\,(e_1 + \cdots + e_{n-r}) + \frac{n-1-2\,r}{2}\,(e_{n-r+1} + \cdots + e_n) & \text{si } 1 \le r \le n-1\,, \\ -\frac{n+1}{2}\,(e_1 + \cdots + e_n) & \text{si } r = n\,. \end{cases}$$

On note τ_μ la représentation irréductible de K de plus haut poids μ donné ci-dessus. Soit τ_λ une représentation irréductible de G de plus haut poids λ. En appliquant la Proposition 10, on déduit que la multiplicité $m_{\,\tau_\lambda|_{S(U(n)\times U(1))}}(\,\tau_\mu\,)$ est non nulle (et donc égale à 1) si et seulement si,

(i) pour $r = 0$, λ est de la forme

$$\lambda = \big(\,\frac{n+1}{2} + 2\,k\,\big)e_1 + \big(\,\frac{n+1}{2} + k\,\big)\big(e_2 + \cdots + e_n\big)$$

avec $k \ge 0$;

(ii) pour $1 \le r \le n-1$, λ est de la forme

$$\begin{aligned} \lambda \;\; = \;\; & \big(\,\frac{n+1}{2} + 2\,k - r - \varepsilon\,\big)e_1 + \big(\,\frac{n+1}{2} + k - r\,\big)\big(e_2 + \cdots + e_{n-r}\big) + \\ & \big(\,\frac{n-1}{2} + k - r + \varepsilon\,\big)e_{n-r+1} + \big(\,\frac{n-1}{2} + k - r\,\big)\big(e_{n-r+2} + \cdots + e_n\big) \end{aligned}$$

avec $\varepsilon \in \{0, 1\}$ et $k \ge \mathrm{Sup}\,\{\,\varepsilon\,,\, r - \frac{n-1}{2}\,\}$;

(iii) pour $r = n$, λ est de la forme

$$\lambda = \big(-\,\frac{n+1}{2} + 2\,k\,\big)e_1 + \big(-\,\frac{n+1}{2} + k\,\big)\big(e_2 + \cdots + e_n\big)$$

avec $k \ge \frac{n+1}{2}$.

La courbure scalaire de l'espace riemannien $M = G/K$ est $R = n$. Par suite, le spectre du carré de l'opérateur de Dirac sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est le suivant : $\mathrm{Spec}_{\,D^2}\,(\,\Gamma^\infty(S)\,) = \big\{\,\langle\,\lambda + 2\,\delta_G\,,\,\lambda\,\rangle + \dfrac{n}{8}\;;\; m_{\lambda|_K}(\mu) \neq 0\,\big\}$

$$= \Big\{ \frac{(2\,k+n+1)(k+n)}{2\,(n+1)};\, k \geq 0 \Big\} \bigcup \Big\{ \frac{(2\,k+n+1-2\,\varepsilon)(k+n-r)}{2\,(n+1)};\, \varepsilon \in \{0,1\},$$
$$1 \leq r \leq n-1,\ k \geq \ \mathrm{Sup}\,\{\varepsilon\,,\, r - \frac{n-1}{2}\,\} \Big\} \bigcup \Big\{ \frac{k\,(2\,k+n-1)}{2\,(n+1)}\ ;\, k \geq \frac{n+1}{2} \Big\}.$$

Remarque. On retrouve ici le résultat obtenu (par d'autres méthodes) dans $[CFG]$ et $[SS]$.

Appendice B : Fonctions zêta spectrales et applications

Soit E un fibré vectoriel complexe hermitien de classe C^∞ au dessus d'une variété riemannienne compacte M de dimension n. Soit $A : L^2(E) \longrightarrow L^2(E)$ un opérateur différentiel elliptique auto-adjoint positif d'ordre m. **La fonction zêta** associée au spectre de l'opérateur A est donnée par

$$\begin{aligned} \zeta(A\,,\,s) &= \mathrm{Trace}\,(A^{-s}) \\ &= \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}\,(A)\setminus\{0\}} \lambda^{-s}\,, \end{aligned}$$

où s est une variable complexe et chaque valeur propre $\lambda \in \mathrm{Spec}\,(A) \setminus \{0\}$ est répétée autant de fois que sa multiplicité. Les séries définissant $\zeta(A\,,\,s)$ convergent pour $\mathcal{R}e\,(s) > \frac{n}{m}$ et donnent lieu à une fonction holomorphe sur ce demi-plan. De plus, on montre que $\zeta(A\,,\,s)$ admet une extension méromorphe à tout le plan complexe et que le point $s = 0$ est un point régulier de cette fonction (voir $[APS2]$ et $[Se]$ pour ces faits).

Vu que la dérivée de la fonction zêta admet une valeur finie en $s = 0$, on peut poser le terme

$$Det_\zeta(A) := exp\,(-\zeta^{'}(A\,,\,0))$$

qu' on appelle **le déterminant zêta-régularisé** de l'opérateur A.

Remarques. (1) Cette définition du déterminant régularisé est motivée par le fait suivant. Considérons une matrice réelle symétrique définie positive A de taille $n \times n$ dont le spectre est donné par

$$Spec\,(A) = \big\{0 < \lambda_1 \leq ... \leq \lambda_n\big\}.$$

Posons $\zeta(A\,,\,s) := \lambda_1^{-s} + \cdots + \lambda_n^{-s}$ pour $s \in \mathbb{C}$. Alors,

$$\begin{aligned} exp\big(-\zeta^{'}(A\,,\,0)\big) &= exp\Big(\sum_{k=1}^{n} Log\,(\lambda_k)\Big) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \lambda_k \\ &= \det\,(A). \end{aligned}$$

(2) Supposons que M est munie d'une structure spin et considérons l'opérateur de Dirac associé, D, agissant sur les champs de spineurs. La définition ci-dessus du déterminant régularisé ne s'applique pas à l'opérateur D car il n'est pas positif. Soit $\big\{\lambda_k\big\}_{k\in\mathbb{N}}$ (resp. $\big\{-\mu_k\big\}_{k\in\mathbb{N}}$) l'ensemble des valeurs propres strictement positives (resp. strictement négatives) de D. Adoptons le choix $(-1)^{-s} = e^{-i\,\pi\,s}$

pour $s \in \mathbb{C}$. La fonction $\zeta(D\,,\,s)$"$=\mathrm{Trace}\,(D^{-s})$" est bien définie et holomorphe pour $\mathcal{R}e\,(s) > n$ si on pose

$$\begin{aligned}
\zeta(D\,,\,s) &:= \sum_k \lambda_k^{-s} + \sum_k (-1)^s\, \mu_k^{-s} \\
&= \sum_k \Big(\frac{\lambda_k^{-s} - \mu_k^{-s}}{2} + \frac{\lambda_k^{-s} + \mu_k^{-s}}{2} \Big) + (-1)^s \sum_k \Big(\frac{\lambda_k^{-s} + \mu_k^{-s}}{2} - \frac{\lambda_k^{-s} - \mu_k^{-s}}{2} \Big) \\
&= (-1)^{-s}\, \frac{\zeta(D^2\,,\,\frac{s}{2}) - \eta(D\,,\,s)}{2} + \frac{\zeta(D^2\,,\,\frac{s}{2}) + \eta(D\,,\,s)}{2}\,,
\end{aligned}$$

où $\eta(D\,,\,s) := \sum_k \lambda_k^{-s} - \sum_k \mu_k^{-s}$ est la fonction êta introduite par Atiyah, Patodi et Singer. Cette dernière fonction est holomorphe pour $\mathcal{R}e\,(s) >> 0$ et admet une extension méromophe à tout le plan complexe avec des pôles simples (voir $[APS1]$). Comme $s = 0$ est un point régulier de la fonction η, on peut donc étudier la dérivée de $\zeta(D\,,\,s)$ en 0. On a

$$\zeta^{'}(D\,,\,0) = \frac{\zeta^{'}(D^2\,,\,0)}{2} + \frac{d}{ds}\big\{(-1)^{-s}\big\}\Big|_{s=0} \frac{\zeta(D^2\,,\,0) - \eta(D\,,\,0)}{2}\,.$$

En définissant le **déterminant zêta-régularisé de l'opérateur de Dirac** D par

$$Det_\zeta(D) := exp\big(-\zeta^{'}(D\,,\,0)\big),$$

on obtient la formule suivante :

$$Det_\zeta(D) = exp\Big(i\,\frac{\pi}{2}\,\big(\zeta(D^2\,,\,0) - \eta(D\,,\,0)\big)\Big)\, exp\Big(-\frac{\zeta^{'}(D^2\,,\,0)}{2}\Big).$$

Notons que l'invariant η, $\eta(M) := \eta(D\,,\,0)$, est égal à zéro dans le cas où le spectre de l'opérateur de Dirac sur M est symétrique.

Soit maintenant $M = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ (n impair) l'espace projectif complexe de dimension n. Soit D^2 le carré de l'opérateur de Dirac agissant sur le fibré des spineurs au dessus de M. Dans ce qui suit, on se propose de calculer (aussi explicitement que possible) les déterminants régularisés $Det_\zeta(D^2)$ et $Det_\zeta(D)$. Pour cela, nous allons appliquer des méthodes similaires à celles utilisées dans $[BS]$ et $[Sth]$.

Soient $G = SU(n+1)$ et $K = S(U(n) \times U(1))$ ($n > 1$). On considère le tore maximal

$$T = \{A = \mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, ..., e^{i\theta_n}, e^{-i\sum_{j=1}^n \theta_j})\,; \theta_j \in \mathbb{R} \text{ pour } j = 1, ..., n\}$$

de G et on fixe le système de racines positives suivant de G relativement à T :

$$\Delta_G^+ = \{e_i - e_j\,;\, 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{e_1 + \cdots + 2\,e_i + \cdots + e_n\,;\, 1 \leq i \leq n\}.$$

Soit ρ une représentation irréductible de G de plus haut poids $\Lambda_\rho = \sum_{j=1}^n \Lambda_j\, e_j$. D'après la formule de dimension de Weyl, on a

$$dim\,\rho = \prod_{\alpha \in \Delta_G^+} \frac{\langle\, \Lambda_\rho + \delta_G\,,\,\alpha\,\rangle}{\langle\, \delta_G\,,\,\alpha\,\rangle}\,,$$

où $\delta_G = \sum_{j=1}^{n} (n+1-j)e_j$ est la demi-somme des racines positives. Plus explicitement, on a

$$dim\,\rho = \prod_{1\leq i<j\leq n+1} \frac{\Lambda_i - \Lambda_j + j - i}{j-i}$$

avec $\Lambda_{n+1} = 0$. Rappelons que le spectre du carré de l'opérateur de Dirac sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est le suivant (voir fin de l'appendice A) :

$$\mathrm{Spec}_{D^2}\,(\,\Gamma^\infty(S)\,) = \Big\{\, f_1(k) = \frac{(k+a)(k+n-1)}{n+1}\;;\, k\geq 1 \Big\} \bigcup \Big\{\, f_2^{r,\varepsilon}(k) = \frac{(k+a-\varepsilon)(k+n-1-r)}{n+1};\, \varepsilon\in\{0,1\}, 1\leq r\leq n-1,\, k > \mathrm{Sup}\,\{\varepsilon\,,\, r-\frac{n-1}{2}\,\}\Big\} \bigcup \Big\{\, f_3(k) = \frac{k\,(k+a)}{n+1}\;;\, k\geq \frac{n+1}{2}\Big\}$$

avec $a = \dfrac{n-1}{2}$. Notons que

(*i*) la multiplicité de la valeur propre $f_1(k)$ est $g_1(k) := dim\,\rho_k$, où ρ_k est la représentation irréductible de G de plus haut poids

$$\Lambda_{\rho_k} \;=\; \big(\,2\,k+a-1\,\big)e_1 + \big(\,k+a\,\big)\big(e_2+\cdots+e_n\big)$$

(*ii*) la multiplicité de la valeur propre $f_2^{r,\varepsilon}(k)$ est $g_2^{r,\varepsilon}(k) := dim\,\rho_k^{r,\varepsilon}$, où $\rho_k^{r,\varepsilon}$ est la représentation irréductible de G de plus haut poids

$$\begin{aligned}\Lambda_{\rho_k^{r,\varepsilon}} \;=\; & \big(\,2\,k+a-r-\varepsilon-1\,\big)e_1 + \big(\,k+a-r\,\big)\big(e_2+\cdots+e_{n-r}\big) + \\ & \big(\,k+a-r+\varepsilon-1\,\big)e_{n-r+1} + \big(\,k+a-r-1\,\big)\big(e_{n-r+2}+\cdots+e_n\big)\end{aligned}$$

(*iii*) la multiplicité de la valeur propre $f_3(k)$ est $g_3(k) := dim\,\rho_k$, où ρ_k est la représentation irréductible de G de plus haut poids

$$\Lambda_{\rho_k} = \big(2\,k-a-1\,\big)e_1 + \big(k-a-1\,\big)\big(e_2+\cdots+e_n\big)$$

Remarque. Une application de la formule de dimension de Weyl nous donne que

$$g_1(k) = \frac{(2\,k+a+n-1)}{n} \prod_{2\leq j\leq n} \frac{(k+j-2)(k+a+n+1-j)}{(j-1)(n+1-j)}\,,$$

où $k\geq 1$. Ainsi, $g_1(k)$ est un polynôme en k de degré $2\,n-1$. Soit j un entier naturel fixé. Pour $k\geq j+1$, on écrit

$$g_1(k-j) = \sum_{i=0}^{2\,n-1} A_{(i\,,\,j)}\,k^i\,.$$

De même, on vérifie que $g_2^{r,\varepsilon}(k)$ et $g_3(k)$ sont deux polynômes en k de degré $2\,n-1$. Posons $b = \dfrac{n+1}{2}$ et $m_{\,r,\varepsilon} = \mathrm{Sup}\,\{\varepsilon\,,\, r-\dfrac{n-1}{2}\,\}+1$. Si $k\geq j+m_{\,r,\varepsilon}$, on écrit

$$g_2^{r,\varepsilon}(k-j) = \sum_{i=0}^{2\,n-1} B_{(i\,,\,j)}^{r,\varepsilon}\,k^i$$

et si $k \geq j+b$, on écrit

$$g_3(k-j) = \sum_{i=0}^{2\,n-1} C_{(i\,,\,j)}\, k^i\,.$$

La fonction zêta associée au spectre du carré de l'opérateur de Dirac a pour expression

$$\begin{aligned}\zeta(D^2\,,\,s) &= \sum_{k\geq 1} g_1(k)\{f_1(k)\}^{-s} + \sum_{\substack{1\leq r\leq n-1\\ \varepsilon=0,1}} \sum_{k\geq m_{\,r,\varepsilon}} g_2^{r,\varepsilon}(k)\{f_2^{r,\varepsilon}(k)\}^{-s} + \\ &\sum_{k\geq b} g_3(k)\{f_3(k)\}^{-s}\,.\end{aligned}$$

1 Calcul de $Det_\zeta(D^2)$

Posons d'abord le terme

$$(I) := \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \sum_{k\geq 1} g_1(k)\{f_1(k)\}^{-s}\,.$$

Alors, $(I) = (I^{'}) + (I^{''})$ avec

$$\begin{aligned}(I^{'}) &:= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \sum_{k\geq 1} g_1(k)\{k+a\}^{-s}\,, \quad \text{et}\\ (I^{''}) &:= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \Big((n+1)^s \sum_{k\geq 1} g_1(k)\{k+n-1\}^{-s}\Big).\end{aligned}$$

Observons que

$$\begin{aligned}(I^{'}) &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \sum_{i=0}^{2\,n-1} \sum_{k\geq a+1} A_{(i\,,\,a)}\, k^{i-s}\\ &= \sum_{i=0}^{2\,n-1} \sum_{k=1}^{a} A_{(i\,,\,a)}\, k^i\, Log\,(k) + \sum_{i=0}^{2\,n-1} A_{(i\,,\,a)}\, \zeta^{'}_{R}(-i)\,,\end{aligned}$$

où ζ_R dénote la fonction zêta de Riemann.

Remarque. La fonction ζ_R satisfait

$$\zeta_R(0) = -\frac{1}{2}\,,\ \zeta_R(-2\,m) = 0\,,\ \text{et}\ \ \zeta_R(1-2m) = \frac{(-1)^m\, B_m}{2\,m}$$

pour tout $m \geq 1$, où les B_m sont les nombres de Bernoulli.

De façon similaire, on obtient l'égalité

$$\begin{aligned}(I^{''}) &= \sum_{i=0}^{2\,n-1} \sum_{k=1}^{n-1} A_{(i\,,\,n-1)}\, k^i\, Log\,(k) + \sum_{i=0}^{2\,n-1} A_{(i\,,\,n-1)}\, \zeta^{'}_{R}(-i) + \\ &Log\,(n+1)\Big\{\Big(\sum_{k\geq n} g_1(k-n+1)\, k^{-s}\Big)\Big|_{s=0}\Big\}.\end{aligned}$$

Notons que

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{k\geq n} g_1(k-n+1)\,k^{-s}\Big)\Big|_{s=0} &= -\sum_{i=0}^{2\,n-1}\sum_{k=1}^{n-1} A_{(i\,,\,n-1)}\,k^i + \Big(\sum_{i=0}^{2\,n-1} A_{(i\,,\,n-1)}\,\zeta_R(s-i)\Big)\Big|_{s=0}\\
&= -\sum_{i=0}^{2\,n-1}\sum_{k=1}^{n-1} A_{(i\,,\,n-1)}\,k^i + \sum_{l=1}^{n}\frac{(-1)^l}{2\,l}\,A_{(2\,l-1\,,\,n-1)}\,B_l - \frac{1}{2}\,A_{(0\,,\,n-1)}\,,
\end{aligned}$$

où les B_l sont les nombres de Bernoulli. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
(I^{''}) \;=\; &\sum_{i=0}^{2\,n-1}\sum_{k=1}^{n-1} A_{(i\,,\,n-1)}\,k^i\,Log\,(k) + \sum_{i=0}^{2\,n-1} A_{(i\,,\,n-1)}\,\zeta^{'}_R(-i) +\\
&Log\,(n+1)\Big\{-\sum_{i=0}^{2\,n-1}\sum_{k=1}^{n-1} A_{(i\,,\,n-1)}\,k^i + \sum_{l=1}^{n}\frac{(-1)^l}{2\,l}\,A_{(2\,l-1\,,\,n-1)}\,B_l - \frac{1}{2}\,A_{(0\,,\,n-1)}\Big\}.
\end{aligned}$$

Posons maintenant le terme suivant :

$$(II_{\,r,\varepsilon)} := \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\sum_{k\geq m_{\,r,\varepsilon}} g_2^{r,\varepsilon}(k)\{f_2^{r,\varepsilon}(k)\}^{-s}\,.$$

Alors, $(II_{\,r,\varepsilon}) = (II^{'}_{\,r,\varepsilon}) + (II^{''}_{\,r,\varepsilon})$ avec

$$\begin{aligned}
(II^{'}_{\,r,\varepsilon}) &:= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\sum_{k\geq m_{\,r,\varepsilon}} g_2^{r,\varepsilon}(k)\{k+a-\varepsilon\}^{-s}\,,\quad\text{et}\\
(II^{''}_{\,r,\varepsilon}) &:= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\Big((n+1)^s\sum_{k\geq m_{\,r,\varepsilon}} g_2^{r,\varepsilon}(k)\{k+n-1-r\}^{-s}\Big).
\end{aligned}$$

Un calcul analogue à celui qu'on a utilisé pour expliciter le terme $(I^{'})$ nous donne que

$$(II^{'}_{\,r,\varepsilon}) = \sum_{i=0}^{2\,n-1}\sum_{k=1}^{p_{\,r,\varepsilon}} B^{r,\varepsilon}_{(i\,,\,a-\varepsilon)}\,k^i\,Log\,(k) + \sum_{i=0}^{2\,n-1} B^{r,\varepsilon}_{(i\,,\,a-\varepsilon)}\,\zeta^{'}_R(-i)\,,$$

avec $p_{\,r,\varepsilon} := m_{\,r,\varepsilon} + a - \varepsilon - 1$. De même, on déduit la formule suivante :

$$\begin{aligned}
(II^{''}_{\,r,\varepsilon}) \;=\; &\sum_{i=0}^{2\,n-1}\sum_{k=1}^{q_{\,r,\varepsilon}} B^{r,\varepsilon}_{(i\,,\,n-r-1)}\,k^i\,Log\,(k) + \sum_{i=0}^{2\,n-1} B^{r,\varepsilon}_{(i\,,\,n-r-1)}\,\zeta^{'}_R(-i) + Log\,(n+1)\,\times\\
&\Big\{-\sum_{i=0}^{2\,n-1}\sum_{k=1}^{q_{\,r,\varepsilon}} B^{r,\varepsilon}_{(i\,,\,n-r-1)}\,k^i + \sum_{l=1}^{n}\frac{(-1)^l}{2\,l}\,B^{r,\varepsilon}_{(2\,l-1\,,\,n-r-1)}\,B_l - \frac{1}{2}\,B^{r,\varepsilon}_{(0\,,\,n-r-1)}\Big\},
\end{aligned}$$

où $q_{\,r,\varepsilon} := m_{\,r,\varepsilon} + n - r - 2$. Par la suite, on considère le terme

$$(III) := \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\sum_{k\geq b} g_3(k)\{f_3(k)\}^{-s}\,.$$

On a alors $(III) = (III^{'}) + (III^{''})$ avec

$$\begin{aligned}
(III^{'}) &:= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \sum_{k\geq b} g_3(k)\, k^{-s}\,, \quad \text{et} \\
(III^{''}) &:= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \Big((n+1)^s \sum_{k\geq b} g_3(k) \{k+a\}^{-s} \Big).
\end{aligned}$$

On observe que

$$\begin{aligned}
(III^{'}) &= \sum_{i=0}^{2\,n-1} \sum_{k=1}^{b-1} C_{(i\,,\,0)}\, k^i \, Log\,(k) + \sum_{i=0}^{2\,n-1} C_{(i\,,\,0)}\, \zeta^{'}_R(-i)\,, \quad \text{et que} \\
(III^{''}) &= \sum_{i=0}^{2\,n-1} \sum_{k=1}^{b-1} C_{(i\,,\,0)}\, k^i \, Log\,(k) + \sum_{i=0}^{2\,n-1} C_{(i\,,\,0)}\, \zeta^{'}_R(-i) + Log\,(n+1) \times \\
&\quad \Big\{ - \sum_{i=0}^{2\,n-1} \sum_{k=1}^{a+b-1} C_{(i\,,\,a)}\, k^i + \sum_{l=1}^{n} \frac{(-1)^l}{2\,l}\, C_{(2\,l-1\,,\,a)}\, B_l - \frac{1}{2}\, C_{(0\,,\,a)} \Big\}.
\end{aligned}$$

En conclusion, le déterminant régularisé du carré de l'opérateur de Dirac sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est donné par

$$Det_\zeta(D^2) = exp\Big(- (I) - \sum_{\substack{1\leq r\leq n \\ \varepsilon=0,1}} (II_{r,\varepsilon}) - (III) \Big),$$

où les formules explicites des termes (I), $(II_{r,\varepsilon})$, et (III) sont donnés ci-dessus.

2 Calcul de $Det_\zeta(D)$

Etant donné que le spectre de l'opérateur de Dirac sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est symétrique par rapport à l'origine, on a l'égalité

$$Det_\zeta(D) = exp\Big(i\, \frac{\pi}{2}\, \zeta(D^2\,,\,0) \Big)\, exp\Big(- \frac{\zeta^{'}(D^2\,,\,0)}{2} \Big).$$

Afin de calculer ce déterminant régularisé, on se propose dans un premier temps de dériver la valeur de la fonction $\zeta(D^2\,,\,s)$ en $s=0$. Posons d'abord

$$(I) := \sum_{k\geq 1} g_1(k) \{f_1(k)\}^{-s}\,.$$

Rappelons que

$$f_1(k) = \frac{k^2 + P(k)}{n+1}\,,$$

où $P(k) := (a+n-1)k + a(n-1)$ est un polynôme en k de degré 1. Fixons un entier $N \geq 1$ tel que $\mid \dfrac{P(k)}{k^2} \mid < 1$ pour tout $k > N$. On définit

$$
\begin{aligned}
(I^{'}) &:= (n+1)^s \sum_{1\le k\le N} g_1(k)\,\big\{(k^2+P(k))^{-s}-k^{-2\,s}\big\},\\
(I^{''}) &:= (n+1)^s \sum_{k>N} g_1(k)\,k^{-2\,s}\,\big\{\big(1+\frac{P(k)}{k^2}\big)^{-s}-1\big\},\quad \text{et}\\
(I^{'''}) &:= (n+1)^s \sum_{k\ge 1} g_1(k)\,k^{-2\,s}\,,
\end{aligned}
$$

et on observe que $(I) = (I^{'}) + (I^{''}) + (I^{'''})$. Remarquons que $(I^{'})$ est une fonction entière dont la valeur en $s = 0$ est nulle. Pour $k > N$ et s proche de 0, on a

$$
(I^{''}) = (n+1)^s \sum_{k>N}\sum_{l\ge 1} \frac{(-1)^l}{l\,!}\,k^{-2(l+s)}\,\Big(\prod_{j=1}^{l}(s+j-1)\Big)\,g_1(k)\big\{P(k)\big\}^l .
$$

Or $g_1(k) = \sum_{i=0}^{2\,n-1} A_{(i\,,\,0)}\,k^i$, d'où on écrit

$$
g_1(k)\big\{P(k)\big\}^l = \sum_{i=0}^{2\,n+l-1} D_{(l\,,\,i)}\,k^i
$$

pour $1 \le l \le 2\,n$. Par suite,

$$
(I^{''})\Big|_{s=0} = \sum_{l=1}^{2\,n} \frac{(-1)^l}{2(l\,!)}\,D_{(l\,,\,2\,l-1)}\,.
$$

La valeur du terme $(I^{'''})$ en $s = 0$ est donnée par

$$
\begin{aligned}
(I^{'''})\Big|_{s=0} &= \Big(\sum_{i=0}^{2\,n-1}\sum_{k\ge 1} A_{(i\,,\,0)}\,k^{i-2\,s}\Big)\Big|_{s=0}\\
&= \Big(\sum_{i=0}^{2\,n-1} A_{(i\,,\,0)}\,\zeta_R(s-2\,i)\Big)\Big|_{s=0}\\
&= \sum_{l=1}^{n} \frac{(-1)^l}{2\,l}\,A_{(2\,l-1\,,\,0)}\,B_l - \frac{1}{2}\,A_{(0\,,\,0)}\,.
\end{aligned}
$$

Posons maintenant

$$
(II_{\,r,\varepsilon}) := \sum_{k\ge m_{\,r,\varepsilon}} g_2^{r,\varepsilon}(k)\big\{f_2^{r,\varepsilon}(k)\big\}^{-s}\,.
$$

Ici, la valeur propre $g_2^{r,\varepsilon}(k)$ est de la forme

$$
g_2^{r,\varepsilon}(k) = \frac{k^2 + P^{\,r,\varepsilon}(k)}{n+1}\,,
$$

où $P^{\,r,\varepsilon}(k)$ est un polynôme en k de degré 1. Du fait que $g_2^{r,\varepsilon}(k) = \sum_{i=0}^{2\,n-1} B^{r,\varepsilon}_{(i\,,\,0)}\,k^i$, on écrit

$$
g_2^{r,\varepsilon}(k)\big\{P^{\,r,\varepsilon}(k)\big\}^l = \sum_{i=0}^{2\,n+l-1} E^{r,\varepsilon}_{(l\,,\,i)}\,k^i
$$

pour $1 \leq l \leq 2\,n$. Il s'ensuit que

$$(II_{r,\varepsilon})\Big|_{s=0} = \sum_{l=1}^{2\,n} \frac{(-1)^l}{2(l\,!)}\, E^{r,\varepsilon}_{(l\,,\,2\,l-1)} + (\star)\,,$$

où

$$(\star) = \begin{cases} -\sum_{i=0}^{2\,n-1} \sum_{k=1}^{m_{\,r,\varepsilon}-1} B^{r,\varepsilon}_{(i\,,\,0)}\, k^i + \sum_{l=1}^{n} \dfrac{(-1)^l}{2\,l}\, B^{r,\varepsilon}_{(2\,l-1\,,\,0)}\, B_l - \dfrac{1}{2}\, B^{r,\varepsilon}_{(0\,,\,0)} & \text{si } m_{\,r,\varepsilon} \geq 2, \\ \sum_{l=1}^{n} \dfrac{(-1)^l}{2\,l}\, B^{r,\varepsilon}_{(2\,l-1\,,\,0)}\, B_l - \dfrac{1}{2}\, B^{r,\varepsilon}_{(0\,,\,0)} & \text{si } m_{\,r,\varepsilon} = 1. \end{cases}$$

Finalement, on pose

$$(III) := \sum_{k \geq b} g_3(k) \big\{ f_3(k) \big\}^{-s}\,.$$

On note ici que la valeur propre $f_3(k)$ est de la forme

$$f_3(k) = \frac{k^2 + P(k)}{n+1}\,,$$

où $P(k)$ est un polynôme en k de degré 1. Rappelons que la multiplicité $g_3(k)$ a pour expression $g_3(k) = \sum_{i=0}^{2\,n-1} C_{(i\,,\,0)}\, k^i$. Ainsi, pour $1 \leq l \leq 2\,n$, on écrit

$$g_3(k) \big\{ P(k) \big\}^l = \sum_{i=0}^{2\,n+l-1} F_{(l\,,\,i)}\, k^i\,.$$

On en déduit que

$$(III)\Big|_{s=0} = \sum_{l=1}^{2\,n} \frac{(-1)^l}{2(l\,!)}\, F_{(l\,,\,2\,l-1)} - \sum_{i=0}^{2\,n-1} \sum_{k=1}^{b-1} C_{(i\,,\,0)}\, k^i + \sum_{l=1}^{n} \frac{(-1)^l}{2\,l}\, C_{(2\,l-1\,,\,0)}\, B_l - \frac{1}{2}\, C_{(0\,,\,0)}\,.$$

Par conséquent, l'invariant spectral $\zeta(D^2\,,\,0)$ s'ecrit comme suit :

$$\zeta(D^2\,,\,0) = (I)\Big|_{s=0} + \sum_{\substack{1 \leq r \leq n \\ \varepsilon = 0,1}} (II_{r,\varepsilon})\Big|_{s=0} + (III)\Big|_{s=0}\,,$$

où les termes $(I)\big|_{s=0}$, $(II_{r,\varepsilon})\Big|_{s=0}$, et $(III)\Big|_{s=0}$ sont donnés par les formules ci-dessus.

En utilisant les résultats des calculs précédents de $\zeta^{'}(D^2\,,\,0)$ et $\zeta(D^2\,,\,0)$, on peut immédiatement déduire une formule pour le déterminant régularisé $Det_\zeta(D)$.

Références

[APS1] M.F. Atiyah, V.K. Patodi, I.M. Singer, Spectral Asymmetry and Riemannian Geometry I, *Math. Proc. Cambridge Philos, Soc.* **77** (1975), 43-69.

[APS2] M.F. Atiyah, V.K. Patodi, I.M. Singer, Spectral Asymmetry and Riemannian Geometry II, *Math. Proc. Cambridge Philos, Soc.* **78** (1975), 405-432.

[BDLMO] A.P. Balachandran, B.P. Dolan, J. Lee, X. Martin, D. O'Connor, Fuzzy Complex Projective Spaces and their Star-Products, *J. Geom. Phys.* **43** (2002), 184-204.

[BS] C. Bär, S. Schopka, The Dirac Determinant of Spherical Space Forms, in : *Geometric Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations, Springer, Berlin* (2003), 39-67.

[BH] M. Ben Halima, Branching Rules for Unitary Groups and Spectra of Invariant Differential Operators on Complex Grassmannians, submitted.

[BGM] M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet, *Le Spectre d'Une Variété Riemannienne*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 194, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1971.

[Br] T.P. Branson, Harmonic Analysis in Vector Bundles Associated to the Rotation and Spin Groups, *J. Funct. Anal.* **106** (1992), 314-328.

[BtD] T. Bröcker, T. tom Dieck, *Representations of Compact Lie Groups*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[CFG] M. Cahen, M. Franc, S. Gutt, Spectrum of the Dirac Operator on Complex Projective Space $P_{2q-1}(\mathbb{C})$, *Lett. Math. Phys.*, **18** (1989), 165-176 ; and Erratum in *Lett. Math. Phys.*, **32** (1994), 365-368.

[Ch] I. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Academic Press, Inc., Orlando, 1984.

[DO] B.P. Dolan, J. Olivier, Fuzzy Complex Grassmannian Spaces and their Star Products, *Internat. J. Modern Phys. A* **18** (2003), 1935-1958.

[DV] M. Dubois-Violette, Dérivations et Calcul Différentiel Non Commutatif, *C.R. Acad. Sci. Paris. t.* **307** (1988), 403-408.

[DVKM] M. Dubois-Violette, R. Kerner, J. Madore, Noncommutative Differential Geometry of Matrix Algebras, *J. Math. Phys.* **31** (1990), 316-322.

[F] T. Friedrich, *Dirac Operators in Riemannian Geometry*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2000.

[GS] H. Grosse, A. Strohmaier, Noncommutative Geometry and the Regularization Problem of $4D$ Quantum Field Theory, *Lett. Math. Phys.* **48** (1999), 163-179.

[Ha1] E. Hawkins, Quantization of Equivariant Vector Bundles, *Commun. Math. Phys.*, **202** (1999), 517-546.

[Ha2] E. Hawkins, Geometric Quantization of Vector Bundles, *Commun. Math. Phys.* **215** (2000), 409-432.

[He] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York, 1978.

[IT] A. Ikeda, Y. Taniguchi, Spectra and Eigenforms of the Laplacian on S^n and $P^n(\mathbb{C})$, *Osaka J. Math.* **15** (1978), 515-546.

[KN] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Volume I, II, Wiley-Interscience, New York, Reprint 1996.

[Kn1] A.W. Knapp, Branching Theorems for Compact Symmetric Spaces, *Represent. Theory* **5** (2001), 404-436.

[Kn2] A.W. Knapp, *Lie Groups Beyond an Introduction*, Second Edition, Birkhäuser, Boston, 2002.

[LM] H.B. Lawson, M-L. Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton University Press, Princeton, 1989.

[Ma1] J. Madore, The Fuzzy Sphere, *Class. Quantum Grav.* **9** (1992), 69-87.

[Ma2] J. Madore, *An Introduction to Noncommutative Differential Geometry and its Physical Applications*, Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[Mic1] J. Mickelsson, Labeling and Multiplicity Problem in the Reduction $U(n+m) \downarrow U(n) \times U(m)$, *J. Math Phy.* **11** (1970), 2803-2806.

[Mic2] J. Mickelsson, An Explicit Basis for the Reduction $U(n+m) \downarrow U(n) \times U(m)$, *J. Math Phy.* **12** (1971), 2378-2382.

[Mil] J-L. Milhorat, Spectrum of the Dirac Operator on $Gr_2(\mathbb{C}^{m+2})$, *J. Math. Phys.* **39** (1998), 594-609.

[P] R.S. Palais, *Seminar on the Atiyah-Singer Index Theorem*, Princeton University Press, Princeton, 1965.

[Se] R.T. Seeley, Complex Powers of an Elliptic Operator, *Proc. Symposium in Pure Math., Vol. 10, Amer. Math. Soc.* (1967), 288-307.

[Sth] N. Sthanumourty, Spectral Invariant of the Zeta Function of the Laplacian on S^{4r-1}, *Indian J. Pure App. Math.* **19** (1988), 407-414.

[Str1] H. Strese, Über den Dirac-Operator auf Graßmann-Mannigfaltigkeiten, *Math. Nachr.* **98** (1980), 53-59.

[Str2] H. Strese, Spektren Symmetrischer Räume, *Math. Nachr.* **98** (1980), 75-82.

[SS] S. Seifarth, U. Semmelmann, The Spectrum of the Dirac Operator on the Complex Projective Space $\mathbb{P}^{2m-1}(\mathbb{C})$, *Preprint SFB No. 95*, Berlin, 1993.

[Wa] N. Wallach, *Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces*, Marcel Dekker, New York, 1973.

[We] R.O. Wells, *Differential Analysis on Complex Manifolds*, Second Edition, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980.

[Z] D.P. Zhelobenko, Classical Groups. Spectral Analysis of Finite-Dimensional Representations, *Uspehi Math. Nauk* **17** (1962), 27-120.